

# الرياضيات



جمهورية مصر العربية  
وزارة التربية والتعليم  
والتعليم الفني  
الإدارة المركزية لشئون الكتب

الفصل الدراسي الأول

الصف الأول الثانوى



٢٠١٨ - ٢٠١٩

غير مصرح بتداول هذا الكتاب  
خارج وزارة التربية والتعليم  
والتعليم الفني



بنك المعرفة المصري  
Egyptian Knowledge Bank







جمهورية مصر العربية  
وزارة التربية والتعليم  
والتعليم الفني  
الإدارة المركزية لشئون الكتب

# الرياضيات

الصف الأول الثانوى      الفصل الدراسي الأول



للرياضيات تطبيقات عملية في مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التي تعتمد على توازى المستقيمات و المستقيمت المقاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقي والطول في الرسم .

## إعداد

أ/ عمر فؤاد جاب الله

أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح

أ/ سيرا فيم إلياس إسكندر

أ.م.د/ عصام وصفي روفائيل

أ/ كمال يونس كبشة

## إشراف علمي

مستشار الرياضيات

## إشراف تربوي

مركز تطوير المناهج

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

٢٠١٨ - ٢٠١٩



# المقدمة

## بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التي تم في ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيما يلي:

- ١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هي مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات في حياته اليومية، والتي تساعد على المشاركة في المجتمع.
- ٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمي، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتي والتعلم النشط والتعلم التعاوني بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية في إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.
- ٣ تقديم رؤية شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع (STS) تعكس دور التقدم العلمي في تنمية المجتمع المحلي، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرف الواعي الفعال حيال استخدام الأدوات التكنولوجية.
- ٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراساتها وتقدير علمائها.
- ٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.
- ٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقيني؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التي تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

### وفي ضوء ما سبق روعى في هذا الكتاب ما يلي:

- ★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومتراصة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمي لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطلاب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعي عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التي تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتي تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاوني، وتتكامل مع الموضوع.
- ★ كما قدم في كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهي كل درس ببند «تحقق من فهمك».
- ★ تنتهي كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة.

وأخيراً.. نتمنى أن نكون قد وفقنا في إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولصناعتنا العزيرة.

والله من وراء القصد، وهو يهدي إلى سواء السبيل





# المحتويات

## الجبر والعلاقات والدوال

الوحدة  
الأولى

- ١ - ١ حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد. ٤
- ٢ - ١ مقدمة عن الأعداد المركبة. ٩
- ٣ - ١ تحديد نوع جذرى المعادلة التربيعية. ١٥
- ٤ - ١ العلاقة بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها. ١٩
- ٥ - ١ إشارة الدالة. ٢٦
- ٦ - ١ متباينات الدرجة الثانية فى مجهول واحد. ٣٣
- ملخص الوحدة. ٣٧

## التشابه

الوحدة  
الثانية

- ١ - ٢ تشابه المضلعات. ٤٢
- ٢ - ٢ تشابه المثلثات. ٤٨
- ٣ - ٢ العلاقة بين مساحتى سطحى مضلعين متشابهين. ٦١
- ٤ - ٢ تطبيقات التشابه فى الدائرة. ٧١
- ملخص الوحدة. ٧٩

## نظريات التناسب فى المثلث

الوحدة  
الثالثة

- ١ - ٣ المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة. ٨٢
- ٢ - ٣ منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة. ٩٤
- ٣ - ٣ تطبيقات التناسب فى الدائرة. ١٠٣
- ملخص الوحدة. ١١٢

## حساب المثلثات

الوحدة  
الرابعة

- ١ - ٤ الزاوية الموجهة. ١١٦
- ٢ - ٤ القياس الستينى والقياس الدائرى لزاوية. ١٢٤
- ٣ - ٤ الدوال المثلثية. ١٣١
- ٤ - ٤ الزاوى المتنسبة. ١٣٩
- ٥ - ٤ التمثيل البيانى للدوال المثلثية. ١٤٩
- ٦ - ٤ إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية. ١٥٣
- ملخص الوحدة. ١٥٧



الوحدة

الجبر

# الجبر والعلاقات والدوال

## Algebra, Relations and Functions

### أهداف الوحدة

- في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:
- يحل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد جبريًا وبيانيًا.
  - يكون معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية معادلة أخرى من الدرجة الثانية في متغير واحد.
  - يوجد مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.
  - يبحث إشارة دالة.
  - يوجد بعض معاملات حدود معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية أحد الجذرين أو كليهما.
  - يتعرف المميز لمعادلة الدرجة الثانية في متغير واحد.
  - يبحث نوع جذري معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد بمعلومية معاملات حدودها.
  - يتعرف مقدمة في الأعداد المركبة (تعريف العدد المركب، قوى ت، كتابة العدد المركب بالصورة الجبرية، تساوى عددين مركبين).
  - يحل متباينات من الدرجة الثانية في مجهول واحد.

### المصطلحات الأساسية

Complex Number	عدد مركب	مميز المعادلة	Equation	معادلة
Imaginary Number	عدد تخيلي	Discriminant of the Equation		جذر المعادلة
Powers of a Number	قوى العدد	إشارة دالة	Root of the Equation	
Inequality	متباينة	Sign of a function	Coefficient of a Term	معامل الحد



## دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): حل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد.

الدرس (٢ - ١): مقدمة عن الأعداد المركبة.

الدرس (٣ - ١): تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية.

الدرس (٤ - ١): العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها.

الدرس (٥ - ١): إشارة الدالة.

الدرس (٦ - ١): متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد.

## الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلي - برامج رسومية - بعض المواقع الإلكترونية مثل:

www.phschool.com

تمثال لمحمد بن موسى الخوارزمي

## نبذة تاريخية

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون) في كتابه الذي ألفه، وكان عنوانه «الجبر والمقابلة»، والذي وضع فيه طرقاً أصيلة لحل المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي هو مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءاً من الحساب. وقد تُرجم الكتاب إلى اللغات الأوروبية بعنوان «الجبر» ومنها أخذ كلمة «الجبر» (algebra).

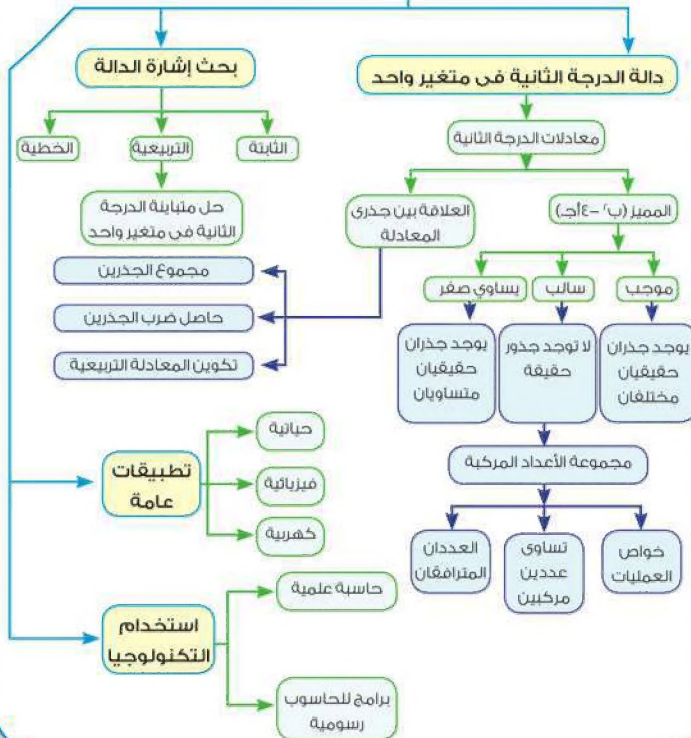
والجذر هو الذي نرّمز له حالياً بالرمز  $\sqrt{\quad}$  (إشارة إلى حل معادلة الدرجة الثانية) وقد وضع الخوارزمي حلولاً هندسية لحل معادلات الدرجة الثانية التي تتفق مع طريقة إكمال المربع. واشتغل كثير من العلماء العرب بحل المعادلات، ومن أشهرهم عمر الخيام الذي اهتم بحل معادلات الدرجة الثالثة. وجدير بالذكر أنه ظهر في بردية أحمس (١٨٦٠ ق.م) بعض المسائل التي يشير حلها إلى أن المصريين في ذلك الحين قد توصلوا إلى طريقة لإيجاد مجموع المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية.

وقد وصل علم الجبر حالياً إلى درجة كبيرة من التطور والتجريد؛ فبعد أن كان يتعامل مع الأعداد أصبح يتعامل مع كيانات رياضية جديدة مثل: المجموعات، والمصفوفات والمتجهات وغيرها.

والأمل معقود عليكم - أبناءنا الطلاب - في استعادة مجدنا العلمي في عصوره الذهبية المصرية الفرعونية والعصور الإسلامية، والتي حمل علماءنا فيها لواء التقدم ومشاعل المعرفة إلى العالم شرقاً وغرباً.

## مخطط تنظيمي للوحدة

### الجبر والعلاقات والدوال





# حل معادلات الدرجة الثانية فى متغير واحد

## Solving Quadratic Equations in One Variable

١ - ١

### فكر q ناقش

### سوف تتعلم

سبق أن درست المعادلات الجبرية فى متغير واحد، وفي هذا الدرس سوف تدرس المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية فى متغير واحد.

فهم المعادلة الجبرية ذات المتغير الواحد.

التمييز بين المعادلات والعلاقات والدوال.

حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد جبرياً وبيانياً.

١- تسمى المعادلة:  $أس + ب = ٠$  حيث  $أ \neq ٠$  بأنها معادلة من الدرجة الأولى فى متغير واحد هو  $س$  (لأن أكبر قوى فيها للمتغير  $س$  هو العدد ١)

٢- تسمى المعادلة:  $أس^٢ + ب س + ج = ٠$  حيث  $أ \neq ٠$  معادلة من الدرجة الثانية فى متغير واحد هو  $س$  (لأن أكبر قوى فيها للمتغير  $س$  هو العدد ٢)

وعلى ذلك فالمعادلة:  $س^٢ - ٣س + ٥ = ٠$  تسمى معادلة من الدرجة الثالثة. (لأن أعلى  $أس$  فيها للمتغير  $س$  هو ٣).

### المصطلحات الأساسية

Equations, relations and functions

### المعادلات والعلاقات والدوال

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية جبرياً كالتالى، بطريقتين:

أولاً: بتحليل المقدار  $أس^٢ + ب س + ج$  حيث  $أ، ب، ج \in \mathbb{R}$ ،  $أ \neq ٠$  (إذا كان ذلك ممكناً فى صـ).

ثانياً: باستخدام القانون العام، ويكون جذرا المعادلة  $أس^٢ + ب س + ج = ٠$  هما:

$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$  حيث  $أ$  معامل  $س^٢$ ،  $ب$  معامل  $س$ ،  $ج$  الحد المطلق.

والآن سوف تدرس حل معادلة الدرجة الثانية بيانياً.

Equation	معادلة
Relation	علاقة
Function	دالة
Factor	عامل
Coefficient	معامل

### حل معادلة الدرجة الثانية بيانياً

### تعلم

Solving quadratic equation graphically

### الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية  
ورق رسم بياني

### تذكر

المقدار الثلاثى

$أس^٢ + ب س + ج$   
حيث  $أ، ب، ج$  أعداد صحيحة يمكن تحليله كحاصل ضرب كثيرتي حدود معاملاتها أعداد صحيحة إذا فقط إذا كان المقدار  $ب^٢ - ٤أج$  مربع كامل

### مثال

١ حل المعادلة:  $س^٢ + س - ٦ = ٠$  بيانياً،

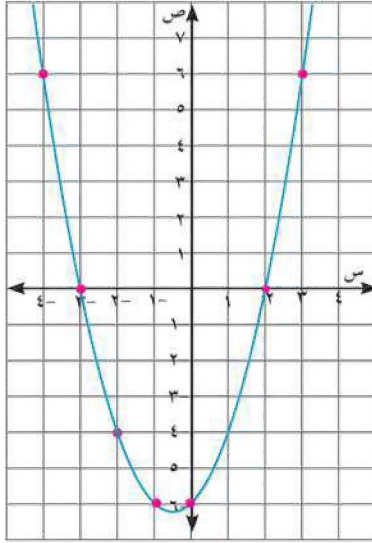
ثم تحقق من صحة الحل.

### الحل

لحل المعادلة  $س^٢ + س - ٦ = ٠$  بيانياً نتبع الآتي:

★ نرسم الشكل البياني للدالة  $د$  حيث  $د(س) = س^٢ + س - ٦$

★ نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هي مجموعة حل المعادلة.



لرسم الدالة د (س) = ص، ص = س<sup>2</sup> + س - 6

ننشئ جدولاً لبعض قيم س، ثم نوجد قيم ص المناظرة لها كالآتي:

س	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣
ص	٦	٠	٤-	٦-	٦-	٤-	٠	٦

★ نعين هذه النقاط في المستوى الإحداثي المتعامد، ونصل بينهما بمنحنى كما في الشكل المجاور.

ومن الرسم نجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات وهي س = -3، س = 2 وبذلك تكون مجموعة حل المعادلة س<sup>2</sup> + س - 6 = 0 هي {-3، 2}.

يمكنك استخدام الحل الجبري لكي تطابقه مع الحل البياني كالآتي:

$$\text{المعادلة: } س^2 + س - 6 = 0$$

$$\text{تحليل المقدار الثلاثي: } (س + 3)(س - 2) = 0$$

$$\text{إما } س + 3 = 0 \quad \text{أو} \quad س - 2 = 0$$

$$\text{أي } س = -3 \quad \text{أو} \quad س = 2 \quad \text{مجموعة الحل هي } \{-3، 2\}$$

#### تذكر

إذا كان أ، ب أعداداً حقيقية  
وكان أ × ب = 0  
فإن: أ = 0 أو ب = 0

#### التحقق من صحة الحل:

$$\text{عندما } س = -3: \text{ الطرف الأيمن للمعادلة } = (-3)^2 + (-3) - 6 = 9 - 3 - 6 = 0 \quad (\text{الطرف الأيسر})$$

$$0 = 9 - 3 - 6 = 0$$

س = -3 تحقق المعادلة.

$$\text{عندما } س = 2: \text{ الطرف الأيمن للمعادلة } = (2)^2 + (2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0 \quad (\text{الطرف الأيسر})$$

$$0 = 4 + 2 - 6 = 0$$

س = 2 تحقق المعادلة.

#### لاحظ أن:

١- في التمثيل البياني للعلاقة السابقة ص = س<sup>2</sup> + س - 6

◀ العلاقة تمثل دالة؛ لأن الخط الرأسى يقطع المنحنى في نقطة واحدة.

◀ المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

◀ المدى هو  $[-\frac{1}{4}, \infty)$

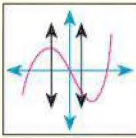
٢- للتعبير عن الدالة يستخدم الرمز د(س) بدلاً من ص، ويُقرأ دالة س.

**تفكير ناقد:** ١- هل كل دالة علاقة؟ فسر ذلك بأمثلة.

٢- هل يمكن تمثيل العلاقات والدوال بمعادلات؟ فسر ذلك.

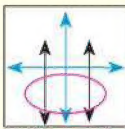
اختبار الخط الرأسى

Vertical line test



دالة

الخط الرأسى يقطع المنحنى  
في نقطة واحدة فقط



ليست دالة

الخط الرأسى يقطع المنحنى  
في نقطتين أو أكثر



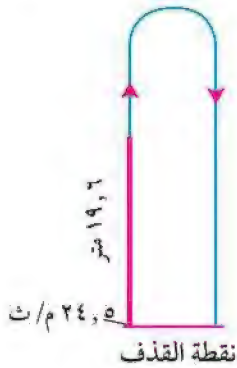
### حاول أن تحل

- ١ مثل العلاقة  $ص = س^2 - ٤$  بيانيًا، ثم أوجد من الرسم مجموعة حل المعادلة  $س^2 - ٤ = ٠$ .  
وإذا كانت  $ص = د(س)$  فبيّن أنّ د دالة، وحدّد مجالها ومداها [ناقش معلمك].

### مثال

- ٢ **الربط بالفيزياء:** أطلقت قذيفة رأسياً بسرعة (ع) تساوي ٢٤,٥ متر/ث. احسب الفترة الزمنية (ن) بالثانية التي تستغرقها القذيفة حتى تصل إلى ارتفاع ف مترًا، حيث (ف) تساوي ١٩,٦ مترًا، علمًا بأن العلاقة بين ف، ن كالآتي:  
ف = ع ن - ٤,٩ ن<sup>٢</sup>.

### الحل



بالتعويض عن: ف = ١٩,٦ متر، ع = ٢٤,٥ متر/ث في العلاقة ف = ع ن - ٤,٩ ن<sup>٢</sup>

$$١٩,٦ = ٢٤,٥ ن - ٤,٩ ن^2 \quad \therefore \text{ويقسم الطرفين على } ٤,٩$$

$$٤ = ٥ ن - ٤,٩ ن^2 \quad \therefore \text{بالتبسيط}$$

$$٠ = ٤ + ٥ ن - ٤,٩ ن^2 \quad \therefore \text{بتحليل المقدار الثلاثي.}$$

$$٠ = (١ - ن) (٤ - ٤,٩ ن) \quad \therefore \text{أى أن: } ١ = ن \text{ ثانية أو } ٤ = ن \text{ ثانية.}$$

**تفسير وجود جوابين:** القذيفة تصل إلى ارتفاع ١٩,٦ مترًا بعد ثانية واحدة، ثم تستمر في الحركة لأعلى حتى تصل لأقصى ارتفاع، ثم تعود إلى نفس الارتفاع مرة أخرى بعد ٤ ثوانٍ من لحظة إطلاقها.

### حاول أن تحل

- ٢ **الربط بالألعاب الرياضية:** في إحدى الألعاب الأولمبية قفز متسابق من منصة ارتفاعها ٩,٨ أمتار عن سطح الماء عاليًا مبتعدًا عنها، فإذا كان ارتفاع المتسابق عن سطح الماء ف مترًا بعد زمن قدره ن ثانية يتحدد بالعلاقة:  
ف = ٤,٩ ن<sup>٢</sup> + ٣,٤٥ ن + ٩,٨ ، فأوجد لأقرب رقمين عشريين متى يصل المتسابق لسطح الماء؟

### نشاط

قم بزيارة المواقع الآتية:



### تمارين (١ - ١)



### أولاً: الاختيار من متعدد

- ١ المعادلة: (س - ١) (س + ٢) = ٠ من الدرجة:   
 أ الأولى ☐   
 ب الثانية ☐   
 ج الثالثة ☐   
 د الرابعة ☐
- ٢ مجموعة حل المعادلة  $س^2 = س$  في ح هي:   
 أ {٠} ☐   
 ب {١} ☐   
 ج {-١، ١} ☐   
 د {٠، ١} ☐

٣ مجموعة حل للمعادلة  $s^2 + 3 = 0$  فى ح هي:

- أ {٣-} ب {٣√-} ج {٣√} د  $\phi$

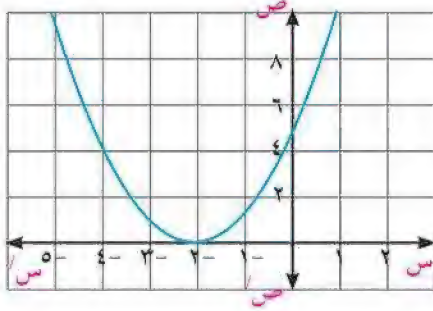
٤ مجموعة حل للمعادلة  $s^2 - 2s = 1$  فى ح هي:

- أ {١-} ب  $\phi$  ج {١، ١-} د {١}

٥ يمثل الشكل المقابل المنحنى البياني لدالة تربيعية د.

مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ فى ح هي:

- أ {٢-} ب {٤} ج  $\phi$  د {٤، ٢-}



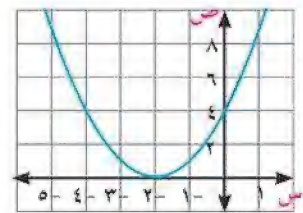
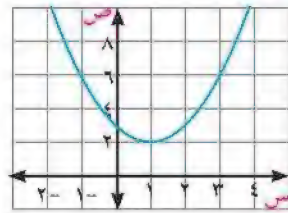
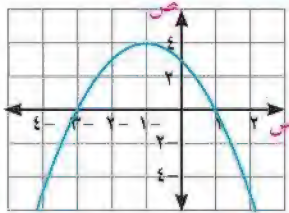
ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

٦ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية فى ح:

- أ س  $1 - s^2 = 0$  ب س  $s^3 + 3s = 0$  ج س  $(s - 4)^2 = 0$  د س  $s^2 - 6s + 9 = 0$  ه س  $s^4 + 9 = 0$  و س  $(s + 1)(s - 1) = 0$

٧ يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البياني لدالة من الدرجة الثانية.

أوجد مجموعة الحل للمعادلة د (س) = ٠ فى كل شكل.



٨ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ح وحقق الناتج بيانياً:

- أ س  $s^2 + 3s + 4 = 0$  ب س  $s^2 - 3 = 5$  ج س  $s^2 - 6 = 5$  د س  $(s - 3)^2 = 5$  ه س  $s^2 + 2s = 12$  و س  $\frac{1}{3}s^2 - \frac{3}{5}s = 1$

٩ حل المعادلات الآتية فى ح باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لرقم عشري واحد.

- أ س  $s^2 - 65 = 0$  ب س  $s^2 - 6s + 7 = 0$  ج س  $s^2 + 6s + 8 = 0$  د س  $s^2 + 3s - 4 = 0$  ه س  $s^2 - 3s - 1 = 0$  و س  $s^3 - 6s - 4 = 0$



١٠ **أعداد:** إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية  $(١ + ٢ + ٣ + \dots + ن)$  يعطى بالعلاقة  $ج = \frac{ن}{٢} (ن + ١)$  فكم عددًا صحيحًا متتاليًا بدءًا من العدد ١ يكون مجموعها مساويًا:

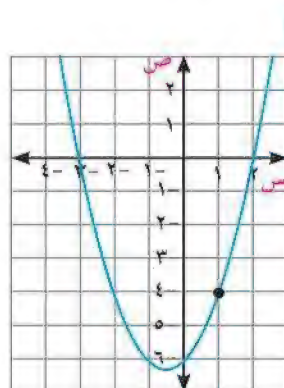
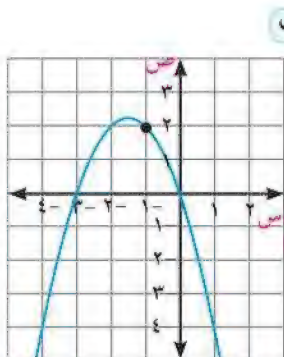
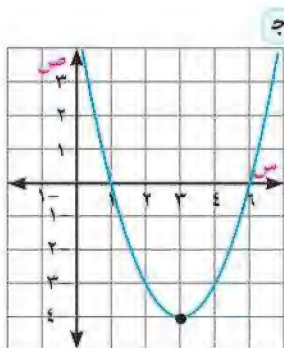
ب ١٧١

أ ٧٨

د ٤٦٥

ج ٢٥٣

١١ يبين كل شكل من الأشكال الآتية الرسم البياني لدالة من الدرجة الثانية في متغير واحد. أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال.



١٢ **اكتشف الخطأ:** أوجد مجموعة حل المعادلة  $(س - ٣)^٢ = (س - ٣)$ .

**إجابة كريم**

$$\begin{aligned} \therefore (س - ٣) &= (س - ٣)^٢ \\ \therefore (س - ٣) - (س - ٣)^٢ &= ٠ \\ \therefore (س - ٣)[١ - (س - ٣)] &= ٠ \\ \text{بالتبسيط: } س - ٣ &= ٠ \text{ أو } س - ٤ = ٠ \\ \text{مجموعة الحل} &= \{٣, ٤\} \end{aligned}$$

**إجابة زياد**

$$\begin{aligned} \therefore (س - ٣) &= (س - ٣)^٢ \\ \text{بقسمة الطرفين على } (س - ٣) \text{ حيث } س &\neq ٣ \\ \therefore س - ٣ &= ١ \text{ وبالتبسيط} \\ \therefore س &= ٤ \\ \text{مجموعة الحل} &= \{٤\} \end{aligned}$$

أي الحلين صحيح؟ لماذا؟

١٣ **تفكير ناقد:** قُذفت كرة رأسياً إلى أعلى بسرعة (ع) تساوى ٤, ٢٩ متر/ث. احسب الفترة الزمنية (ن) بالثانية التي تستغرقها الكرة حتى تصل إلى ارتفاع (ف) متراً، حيث ف تساوى ٢, ٣٩ متراً علماً بأن العلاقة بين ف، ن تُعطى كالآتي  $ف = ع - ٤, ٩ ن^٢$ .

## مقدمة عن الأعداد المركبة

### Complex Numbers

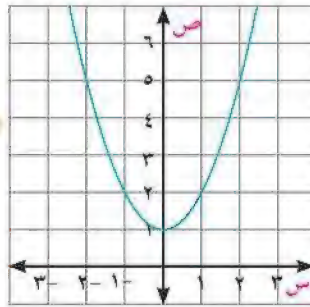
٢ - ١

سوف نتعلم



- مفهوم العدد التخيلي.
- قوى ت الصحيحة.
- مفهوم العدد المركب.
- تساوى عددين مركبين.
- العمليات على الأعداد المركبة.

سبق أن درست نظمًا مختلفة للأعداد، وهي نظام الأعداد الطبيعية "ط" ونظام الأعداد الصحيحة "ص" ونظام الأعداد النسبية "ن" وغير النسبية "هـ" وأخيرًا نظام الأعداد الحقيقية "ح" ورأينا أن أى نظام ينشأ كتوسيع للنظام الذى يسبقه لحل معادلات جديدة لم تكن قابلة للحل فى النظام السابق، وإذا تأملنا المعادلة  $x^2 = -1$  نجد أنها غير قابلة للحل فى ح، إذ لا يوجد عدد حقيقى مربعه يساوى (-1) يحقق المعادلة؛ لذا نحتاج لدراسة مجموعة جديدة من الأعداد تسمى مجموعة الأعداد المركبة.



يبين الشكل المجاور: التمثيل البياني للدالة  $y = x^2 + 1$  نلاحظ من الرسم أن منحنى الدالة لا يقطع محور السينات؛ وبذلك لا يكون للمعادلة  $x^2 + 1 = 0$  حلول حقيقية. لذا كان من الضروري التفكير فى مجموعة جديدة للأعداد لحل هذا النوع من المعادلات.

#### المصطلحات الأساسية

- Imaginary Number عدد تخيلي
- Complex Number عدد مركب



Imaginary number

العدد التخيلي

يعرف العدد التخيلي بأنه العدد الذى مربعه يساوى (-1)

أى أن:  $x^2 = -1$  وله الخاصية  $x^2 = -1$  لكل  $x \in \mathbb{C}$

وتسمى الأعداد التى على الصورة  $2x$ ،  $-5x$ ،  $3x$  ت بالأعداد التخيلية

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

بذلك نكتب  $3x = 3x$

$5x = 5x$  وهكذا.....

**تفكير ناقد:** إذا كان  $a$ ،  $b$  عددين حقيقيين سالبين، فهل من الممكن أن يكون

$$a \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad ? \text{ فسر ذلك بمثال عددي.}$$



### لاحظ:

ت يرمز لها بالرمز  $i$

### قوى ت الصحيحة: Integer powers of $i$

العدد ت يحقق قوانين الأسس التي سبق لك دراستها، ويمكن التعبير عن القوى المختلفة للعدد ت كالتالي:

$$\begin{aligned} t^1 &= t & t^2 &= -1 & t^3 &= t \times t \times t = -t & t^4 &= t \times t \times t \times t = 1 \\ t^5 &= t & t^6 &= -1 & t^7 &= t & t^8 &= 1 \end{aligned}$$

وبوجه عام فإن:  $t^{4n} = 1$  ،  $t^{4n+1} = t$  ،  $t^{4n+2} = -1$  ،  $t^{4n+3} = -t$  حيث  $n \in \mathbb{Z}$

### مثال

١ أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

أ  $t^{30}$     ب  $t^{43}$     ج  $t^{71}$     د  $t^{19}$

### الحل

أ  $t^{30} = (t^4)^7 \times t^2 = 1 \times 1 \times -1 = -1$     ب  $t^{43} = (t^4)^{10} \times t^3 = 1 \times t \times -t = -t^2 = -(-1) = 1$   
ج  $t^{71} = (t^4)^{17} \times t^3 = 1 \times t \times -t = -t^2 = -(-1) = 1$     د  $t^{19} = (t^4)^4 \times t^3 = 1 \times t \times -t = -t^2 = -(-1) = 1$

### حاول أن تحل

١ أوجد كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

أ  $t^{24}$     ب  $t^{27}$     ج  $t^{43}$     د  $t^{51}$     هـ  $t^{29}$     و  $t^{42}$

### تعلم

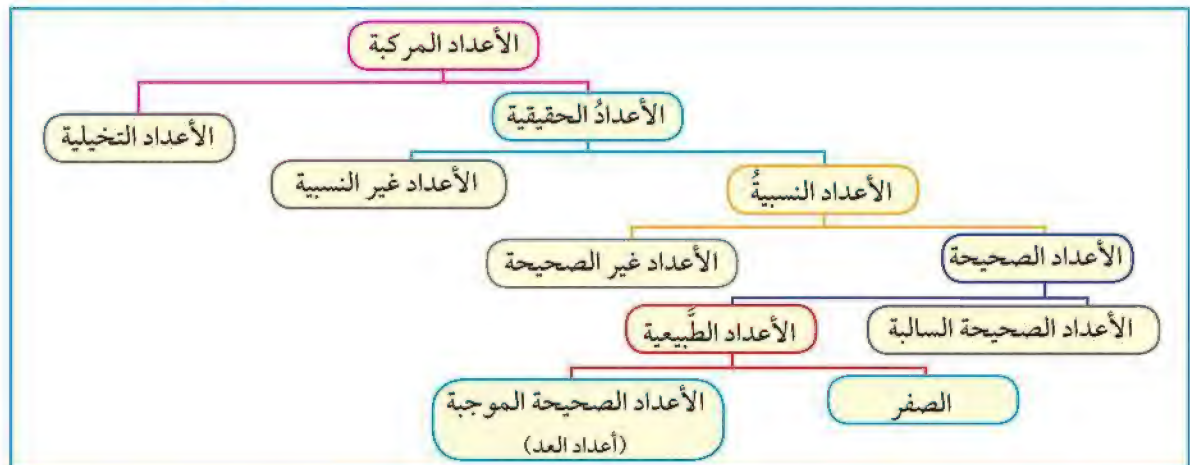
### Complex number

### العدد المركب

#### العدد المركب

$$\begin{array}{c} a + bi \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{الجزء} \quad \text{الجزء} \\ \text{الحقيقي} \quad \text{التخيلي} \end{array}$$

العدد المركب هو العدد الذي يمكن كتابته على الصورة  $a + bi$  حيث  $a, b$  عددا حقيقيان. و يبين الشكل التالي مجموعات الأعداد التي تُشكل جزءاً من نظام العدد المركب.



إذا كان  $a$ ،  $b$  عددين حقيقيين فإن العدد  $c$  حيث  $c = a + b$  يسمى عددًا مركبًا، وتسمى  $a$  بالجزء الحقيقي للعدد المركب  $c$ ،  $b$  بالجزء التخيلي للعدد المركب  $c$ .

وإذا كانت  $b = 0$  فإن العدد  $c = a$  يكون حقيقيًا، وإذا كانت  $a = 0$  فإن العدد  $c = b$  يكون تخيليًا حيث  $b \neq 0$ .

مثال

٢ حل المعادلة  $9س^2 + 12س + 61 = 0$

الحل

المعادلة  $9س^2 + 12س + 61 = 0$

بإضافة  $(-12س)$  إلى طرفي المعادلة  $9س^2 + 12س + 61 - 12س = 0 - 12س$

بقسمة طرفي المعادلة على ٩  $9س^2 - 12س + 61 = -12س$

بأخذ الجذر التربيعي

تعريف العدد المركب

$9س^2 - 12س + 61 = -12س$

$9س^2 - 12س + 61 = -12س$

$9س^2 - 12س + 61 = -12س$

حاول أن تحل

٢ حل كلا من المعادلات الآتية:

أ  $3س^2 + 27س + 0 = 0$

ب  $5س^2 + 24س + 0 = 0$

ج  $4س^2 + 100س + 75 = 0$

Equality of two complex numbers

تساوي عددين مركبين

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا تساوى الجزءان الحقيقيان وتساوى الجزءان التخيليان.

إذا كان:  $a + b$   $c + d$  فإن:  $a = c$  ،  $b = d$  والعكس صحيح

مثال

٣ أوجد قيمتي  $s$ ،  $v$  اللتين تُحققان المعادلة:  $2س - ص + (2ص - 5) = 0$  حيث  $s$ ،  $v \in \mathbb{C}$ ،  $1 = 0$

الحل

بمساواة الجزأين الحقيقيين أحدهما بالآخر وكذلك الجزأين التخيليين أحدهما بالآخر

$2س - ص = 5$  ،  $2ص - 5 = 0$

$س = 3$  ،  $ص = 1$

بحل المعادلتين ينتج أن

حاول أن تحل

٣ أوجد قيمتي  $s$ ،  $v$  اللتين تُحققان كل من المعادلات الآتية:

أ  $(2س + 1) + 4ص = 12 - 5$  ب  $2س - 3 + (3ص + 1) = 10 + 7$  ت



## Operations on complex numbers

## العمليات على الأعداد المركبة

يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، كما توضح ذلك الأمثلة التالية:

## مثال

٤ أوجد في أبسط صورة ناتج كل مما يأتي:

أ  $(-7 + 4i) + (2 + i)$       ب  $(2 + 3i)(3 - 4i)$

## الحل

أ المقدار  $(-7 + 4i) + (2 + i) =$

$$= (-7 + 2) + (4i + i) = -5 + 5i$$

باستخدام خاصيتي الإبدال والتجميع بالتبسيط

ب المقدار  $(2 + 3i)(3 - 4i) =$

$$= 2(3 - 4i) + 3i(3 - 4i) =$$

باستخدام خاصية التوزيع

$$= 6 - 8i + 9i - 12i^2 =$$

بفك الأقواس

$$= 6 - 8i + 9i - 12(-1) =$$

حيث  $i^2 = -1$

$$= 6 - 8i + 9i + 12 = 18 + i$$

بالتبسيط

## حاول أن تحل

٤ أوجد في أبسط صورة ناتج كل مما يأتي:

أ  $(12 - 5i) - (7 - 9i)$       ب  $(4 - 3i)(3 + 4i)$       ج  $(5 - 6i)(3 + 2i)$

## Conjugate Numbers

## العددان المترافقان

العددان المركبان  $a + bi$  ،  $a - bi$  يسميان بالعددين المترافقين **فمثلاً**  $3 - 4i$  ،  $3 + 4i$  عددان مترافقان، حيث:

$$(1) (3 - 4i)(3 + 4i) = (3)^2 - (4i)^2 =$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 25$$

(الناتج عدد حقيقي)

$$(2) (3 - 4i) + (3 + 4i) = 8$$

(الناتج عدد حقيقي)

## تفكير ناقد:

هل بالضرورة أن يكون مجموع العددين المترافقين هو دائماً عدداً حقيقياً؟ فسر ذلك.

هل بالضرورة أن يكون حاصل ضرب العددين المترافقين هو دائماً عدداً حقيقياً؟ فسر ذلك.

## مثال

٥ أوجد قيمتي س، ص اللتين تحققان المعادلة:

$$\frac{(2+t)(t-2)}{t^2+3} = s + t \text{ ص}$$

## الحل

بفك الأقواس

$$\frac{t^2-4}{t^2+3} = s + t \text{ ص}$$

بضرب البسط والمقام في مرافق المقام (٣ - ٤ ت)

$$s + t \text{ ص} = \frac{t^2-4}{t^2+3} \times \frac{1+t}{t^2+3}$$

بالتبسيط

$$s + t \text{ ص} = \frac{(t-2)(t+2)}{t^2+3}$$

بتطبيق تساوي عددين مركبين

$$s + t \text{ ص} = \frac{t-2}{t^2+3}$$

$$\text{أي أن: } s = \frac{2}{t^2+3}, \text{ ص} = -\frac{t}{t^2+3}$$

## حاول أن تحل

٥ أوجد في أبسط صورة قيمة كل مما يأتي:

٥  $\frac{t^2+3}{t^2-5}$

٦  $\frac{t-3}{t-2}$

ب  $\frac{26}{t^2-3}$

أ  $\frac{t^2-4}{t^2}$

## مثال

٦ كهرباء: أوجد شدة التيار الكهربائي الكلية المار في مقاومتين متصلتين على التوازي في دائرة كهربائية مغلقة، إذا كانت شدة التيار في المقاومة الأولى ٥ - ٣ أمبير وفي المقاومة الثانية ٢ + ت أمبير (علمًا بأن شدة التيار الكلية تساوي مجموع شدتي التيار المار في المقاومتين).

## الحل

∴ شدة التيار الكهربائي الكلية = مجموع شدتي التيار المار في المقاومتين.

$$= (5-3) + (2+t) \quad \therefore$$

$$= (2+5) + (3-1) \text{ ت}$$

$$= 7-2 \text{ ت أمبير}$$

## حاول أن تحل

٦ إذا كانت شدة التيار الكهربائي الكلية المار في مقاومتين متصلتين على التوازي في دائرة كهربائية مغلقة تساوي ٦ + ٤ ت أمبير، وكانت شدة التيار المار في إحدهما  $\frac{17}{t-4}$ ، فأوجد شدة التيار المار في المقاومة الأخرى.



## تحقق من فهمك

١ تفكير ناقذ: أوجد في أبسط صورة  $(١-ت)^{١٠}$



### تمارين (١ - ٢)



١ ضع كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

٥  $ت٤-١$

ج  $ت٤+٢$

ب  $ت٤٥-$

أ  $ت٦٦$

٢ بسط كلاً مما يأتي:

أ  $١٨-٦ \times ١٢-٦$  ب  $٣(ت٢-)$  ج  $(ت٤-)(ت٦-)$  د  $(ت٢-)^٢(ت٣-)^٢$

٣ أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة:

أ  $(ت٢+٣)+(ت٥-٢)$  ب  $(ت٤-٢٦)-(ت٢٠-٩)$  ج  $(ت٢٥+٢٠)-(ت٢٠-٩)$

٤ ضع كلاً مما يأتي على صورة  $١+ب$  ت

أ  $(ت٣+٢)-(ت٢-١)$  ب  $(٢ت٢+١)(٢ت٣+٢+٤ت٤)$

٥ ضع كلاً مما يأتي على صورة  $١+ب$  ت

أ  $\frac{٢}{ت+١}$  ب  $\frac{ت+٤}{ت}$  ج  $\frac{ت٣-٢}{ت+٣}$  د  $\frac{(ت+٣)(ت-٣)}{ت٤-٣}$

٦ حل كل من المعادلات الآتية:

أ  $٣س+١٢=٠$  ب  $٤ص+٢٠=٠$  ج  $٤ع+٧٢=٠$  د  $\frac{٣}{٥}ص+١٥=٠$

٧ كهرباء: أوجد شدة التيار الكهربى الكلية المار فى مقاومتين متصلتين على التوازى فى دائرة كهربائية مغلقة

إذا كانت شدة التيار فى المقاومة الأولى ٤ - ٢ أمبير، وفى المقاومة الثانية  $\frac{٣+٦}{ت+٢}$  أمبير

٨ اكتشف الخطأ: أوجد أبسط صورة للمقدار:  $(٣+٢)^٢(٣-٢)$

إجابة كريم

$$\begin{aligned}(٣-٢)(٣+٢)^٢(٣+٢) &= (٣-٢)(٣+٢)^٢(٣+٢) \\ (٣-٢)(٣+٢)^٢(٣+٢) &= (٣-٢)(٣+٢)^٢(٣+٢) \\ ١٥+١٠ &= ٢٥\end{aligned}$$

إجابة أحمد

$$\begin{aligned}(٣-٢)(٣+٢)(٣+٢) &= (٣-٢)(٣+٢)(٣+٢) \\ (٣-٢)(٣+٢)(٣+٢) &= (٣-٢)(٣+٢)(٣+٢) \\ (٣+٢)١٣ &= (٣+٢)١٣ \\ ٣٩+٢٦ &= ٦٥\end{aligned}$$

أى الحلين صحيح؟ لماذا؟

## تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

### Determining the Types of Roots of a Quadratic Equation

٣ - ١

سوف نتعلم



كيفية تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

سبق أن درست حل معادلة الدرجة الثانية (المعادلة التربيعية) في متغير واحد في ح؛ وعلمت من خلال حل المعادلة أن عدد حلولها الحقيقية إما أن يكون حلين أو حلاً وحيداً مكرراً، أو لا يوجد حل للمعادلة في ح، فهل يمكنك إيجاد عدد جذور (حلول) معادلة الدرجة الثانية في ح دون حلها؟



Discriminant

المميز

جذرا المعادلة التربيعية  $اس^2 + ب س + ج = ٠$  حيث  $ا \neq ٠$ ،  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج \in \mathbb{C}$

$$\text{هما: } \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤ا ج}}{٢ا} ، \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤ا ج}}{٢ا}$$

وكلا الجذرين يحتوى على المقدار  $\sqrt{ب^2 - ٤ا ج}$ .

يسمى المقدار  $ب^2 - ٤ا ج$  مميز المعادلة التربيعية، ويستخدم لتحديد نوع جذري المعادلة.

المصطلحات الأساسية

Root

جذر

Discriminant

مميز

مثال

١ حدد نوع جذري كل من المعادلات الآتية:

أ  $٥س^2 + س - ٧ = ٠$  ب  $س^2 - ٢س + ١ = ٠$

ج  $س^2 + ٥س - ٣٠ = ٠$

الحل

لتحديد نوع الجذرين:

أ  $ا = ٥$ ،  $ب = ١$ ،  $ج = -٧$

المميز  $= ب^2 - ٤ا ج$

$$= ١ - ٤ \times ٥ \times (-٧) = ١٤١$$

∴ المميز موجب لذلك يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

ب  $ا = ١$ ،  $ب = -٢$ ،  $ج = ١$

المميز  $= ب^2 - ٤ا ج$

$$= ٤ - ٤ \times ١ \times ١ = ٠$$

∴ المميز يساوى صفراً، إذن الجذران حقيقيان ومتساويان.

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية



المميز =  $b^2 - 4ac$

ج ١ = -١، ب = ٥، ج = -٣٠

$$90 = 30 \times 1 - 4 \times 1 = 25$$

∴ المميز سالب، إذن يوجد جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين).

لاحظ أن

المميز	نوع الجذرين	شكل تخطيطي للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac < 0$	جذران حقيقيان مختلفان	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي واحد مكرر (جذران متساويان)	
$b^2 - 4ac > 0$	جذران مركبان مترافقان (غير حقيقيين).	

حاول أن تحل

١ عيّن نوع جذري كل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية :

ب ١٢س - ٤س = ٩

أ ٦س = ١٩س - ١٥

د ٥س (٥ + س) = ٢ (٧ - س)

ج ٥ = س (س - ٢)

مثال

٢ أثبت أن جذري المعادلة  $2x^2 - 3x + 2 = 0$  مركبان و غير حقيقيين، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

الحل

$a = 2, b = -3, c = 2$

∴ المميز  $= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7$

∴ المميز  $= b^2 - 4ac$

∴ يوجد جذران مركبان (غير حقيقيين).

∴ المميز سالب

القانون العام:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4}$

جذرا المعادلة هما:  $x = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{-7}}{4}$ ،  $x = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{-7}}{4}$

**تفكير ناقد:** هل بالضرورة أن يكون جذرا المعادلة التربيعية في مجموعة الأعداد المركبة عددين مترافقين؟ وضح بمثال من عندك.

### حاول أن تحل

٢ أثبت أن جذري المعادلة  $x^2 - 11x + 5 = 0$  مركبان، ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين.

### مثال

٣ إذا كان جذرا المعادلة  $x^2 + 2(ك - ١)x + ٩ = 0$  متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم تحقق من صحة الناتج:

الحل

**التحقيق:** عندما  $ك = ٤$   
تصبح المعادلة:  $x^2 + ٦x + ٩ = 0$   
و يكون لها جذران متساويان هما:  $-٣, -٣$   
**التحقيق:** عندما  $ك = ٢$   
تصبح المعادلة:  $x^2 - ٦x + ٩ = 0$   
و يكون لها جذران متساويان هما:  $٣, ٣$

ب  $ك = ٤$  أجب  
 $٤(ك - ١) - ٩ \times ١ \times ٩ = ٠$   
 $٤ك - ٨ - ٨١ = ٠$   
 $٤ك - ٨٩ = ٠$   
 $٤ك = ٨٩$   
 $ك = \frac{٨٩}{٤}$   
أو  $ك = ٢$

### حاول أن تحل

٣ إذا كان جذرا المعادلة  $x^2 - ٢كx + ٧ = 0$  متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.

## تمارين (١ - ٣)

أولاً: اختيار من متعدد:

- ١ يكون جذرا المعادلة  $x^2 - ٤x + ٠ = 0$  متساويين إذا كانت:
  - أ  $ك = ١$
  - ب  $ك = ٤$
  - ج  $ك = ٨$
  - د  $ك = ١٦$
- ٢ يكون جذرا المعادلة  $x^2 - ٢x + م = 0$  حقيقيين مختلفين إذا كانت:
  - أ  $م = ١$
  - ب  $م > ١$
  - ج  $م < ١$
  - د  $م = ٤$
- ٣ يكون جذرا المعادلة  $x^2 - ١٢x + ٩ = 0$  مركبين غير حقيقيين إذا كانت:
  - أ  $ل < ٤$
  - ب  $ل > ٤$
  - ج  $ل = ٤$
  - د  $ل = ١$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٤ حدد عدد الجذور وأنواعها لكل معادلة من المعادلات التربيعية الآتية:
  - أ  $x^2 - ٥x + ٠ = 0$
  - ب  $x^3 + ١٠x - ٤ = 0$
  - ج  $x^2 - ١٠x + ٢٥ = 0$
  - د  $x^2 - ١٩x + ٣٥ = 0$
  - هـ  $(١١ - x) - (٦ - x) = ٠$
  - و  $(١ - x)(٧ - x) = ٢(٣ - x)(٤ - x)$



٥ أوجد حل كل من المعادلات الآتية في مجموعة الأعداد المركبة باستخدام القانون العام.

أ  $س^٢ - ٤س + ٥ = ٠$  ب  $س^٢ + ٦س + ٥ = ٠$

ج  $س^٣ - ٧س + ٦ = ٠$  د  $س^٤ - ٢س + ١ = ٠$

٦ أوجد قيمة ك في كل من الحالات الآتية:

أ إذا كان جذرا المعادلة  $س^٢ + ٤س + ك = ٠$  حقيقيين مختلفين.

ب إذا كان جذرا المعادلة  $س^٢ - ٣س + ٢ + \frac{١}{س} = ٠$  متساويين.

ج إذا كان جذرا المعادلة  $س^٢ - ٨س + ١٦ = ٠$  مركبين غير حقيقيين.

٧ إذا كان ل، م عددين نسيبين، فأثبت أن جذري المعادلة:  $ل س^٢ + (ل - م) س - م = ٠$  عددان نسيبان.

٨ يقدر عدد سكان جمهورية مصر العربية عام ٢٠١٣ بالعلاقة:

$ع = ن^٢ + ٢ن + ١$  حيث (ع) عدد السكان بالمليون، (ن) عدد السنوات

أ كم كان عدد السكان عام ٢٠١٣

ب قدر عدد السكان عام ٢٠٢٣

ج قدر عدد السنوات التي يبلغ عدد السكان فيها ٣٣٤ مليوناً.

د اكتب مقالاً توضح فيه أسباب الزيادة المطردة في عدد السكان وكيفية علاجها.

٩ اكتشف الخطأ: ما عدد حلول المعادلة  $س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$  في ح

إجابة كريم

ب  $س^٢ - ٦س + ٥ = (س - ٦)(س - ٥)$

$٧٦ = ٤٠ + ٣٦ =$

المميز موجب، فيوجد حلان حقيقيان مختلفان

إجابة أحمد

ب  $س^٢ - ٦س + ٥ = (س - ٦)(س - ٥)$

$٤ - = ٤٠ - ٣٦ =$

المميز سالب، فلا توجد حلول حقيقية

١٠ إذا كان جذرا المعادلة  $س^٢ + ٢(ك - ١)س + (٢ك + ١) = ٠$  متساويين، فأوجد قيم ك الحقيقية، ثم أوجد الجذرين.

١١ تفكير ناقد: حل المعادلة  $س^٢ - ٤٨س + ٢٥ = ٠$  في مجموعة الأعداد المركبة.

## ١ - ٤

## العلاقة بين جذري معادلة الدرجة الثانية ومعاملات حدودها

### The Relation Between Two Roots of the Second Degree Equation and the Coefficients of its Terms

#### سوف نتعلم

- كيفية إيجاد مجموع الجذرين لمعادلة تربيعية معطاة.
- كيفية إيجاد حاصل ضرب الجذرين
- إيجاد معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى.



نعلم أن جذري المعادلة  $x^2 - 8x + 3 = 0$  هما  $\frac{1}{3}$  ،  $\frac{3}{4}$   
**مجموع الجذرين**  $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$   
**حاصل ضرب الجذرين**  $\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

هل توجد علاقة بين مجموع جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟  
 هل توجد علاقة بين حاصل ضرب جذري المعادلة ومعاملات حدودها؟



#### مجموع الجذرين وحاصل ضربهما

#### Sum and multiply of two roots

#### المصطلحات الأساسية

- مجموع جذرين Sum of Two Roots
- حاصل ضرب جذرين Product of Two Roots

جذرا المعادلة التربيعية  $ax^2 + bx + c = 0$  هما:

$$-\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وباعتبار أن الجذر الأول = ل، الجذر الثاني = م فإن:

$$ل + م = -\frac{b}{a} \quad (\text{أثبت ذلك}) \quad ل \cdot م = \frac{c}{a} \quad (\text{أثبت ذلك})$$

**تعبير شفهي** في المعادلة التربيعية  $ax^2 + bx + c = 0$

أوجد ل + م ، ل م في الحالات الآتية:

- أ إذا كان  $a = 1$
- ب إذا كانت  $b = 1$
- ج إذا كان  $c = 1$

#### مثال

١) دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة:

$$x^2 + 5x - 12 = 0$$

**الحل**

$$a = 1, b = 5, c = -12$$

$$\text{مجموع الجذرين} = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$$



### حاول أن تحل

- ١ دون حل المعادلة أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل من المعادلات الآتية :
- أ  $٢س^٢ + س - ٦ = ٠$  ب  $٣س^٢ = ٢٣س - ٣٠$  ج  $٠ = (٢ + س)(٣ - س)$

### مثال

- ٢ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة  $٢س^٢ - ٣س + ك = ٠$  يساوي ١ فأوجد قيمة ك، ثم حل المعادلة.

### الحل

حاصل ضرب الجذرين  $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٨ك}}{٤} = ١$  ،  $٢ = ١$  ،  $٣ = -٣$  ،  $٢ = ١$

القانون العام:

$$س = \frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٨ك}}{٤}$$

$$\frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} = \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} = \frac{\sqrt{١٦ - ٩} \pm ٣}{٤} =$$

مجموعة حل المعادلة هي  $\left\{ \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} ، \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٤} \right\}$  ت

### حاول أن تحل

- ٢ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة  $٣س^٢ + ١٠س - ٦ = ٠$  هو  $\frac{١٠}{٣}$  فأوجد قيمة ج، ثم حل المعادلة.
- ٣ إذا كان مجموع جذري المعادلة  $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$  هو  $\frac{٣}{٢}$  فأوجد قيمة ب، ثم حل المعادلة.

### مثال

- ٣ إذا كان (١ + ت) هو أحد جذور المعادلة  $٢س^٢ - ٢س + ١ = ٠$  حيث  $١ \in \mathbb{C}$  فأوجد:
- أ الجذر الآخر ب قيمة ١

### الحل

١ = ١ ، ٢ = -٢ ، ج = ١

أ :  $١ + ت$  هو أحد جذري المعادلة

لأن الجذرين مترافقان ومجموعهما  $٢ = ١$  ، الجذر الآخر  $١ - ت$

ب : حاصل ضرب الجذرين  $١ = ١$

$١ = (١ + ت)(١ - ت)$

$١ = ١ + ١ - ت^٢$  ،  $٢ = -ت^٢$

### حاول أن تحل

- ٤ إذا كان (٢ + ت) هو أحد جذور المعادلة  $٢س^٢ - ٤س + ب = ٠$  حيث  $٢ \in \mathbb{C}$  فأوجد:
- أ الجذر الآخر ب قيمة ب



## تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

Forming the quadratic equation whose roots are known

بفرض أن ل، م هما جذرا المعادلة التربيعية:  $اس^2 + بس + ج = 0$  ،  $ا \neq 0$

بقسمة طرفي المعادلة على ا:

$$0 = \frac{ج}{ا} + س + \frac{ب}{ا}س$$

$$أي \quad 0 = \frac{ج}{ا} + س + \left(\frac{ب}{ا}\right)س$$

∴ ل، م جذرا المعادلة التربيعية ،  $\frac{ب}{ا} = - (ل + م)$  ،  $\frac{ج}{ا} = ل م$

∴ المعادلة التربيعية التي جذراها ل، م هي:

$$س^2 - (ل + م)س + ل م = 0$$

مثال

٤) كون المعادلة التربيعية التي جذراها ٤، -٣

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

∴ صيغة المعادلة التربيعية هي:  $س^2 - (ل + م)س + ل م = 0$  ،  $ل = 4$  ،  $م = -3$  ،  $ل م = -12$

∴ المعادلة هي:  $س^2 - س - 12 = 0$

مثال

٥) كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:  $\frac{ت+٢}{ت+١}$  ،  $\frac{ت-٤}{ت-٢}$

الحل

ليكن جذرا المعادلة هما ل، م

$$ل = \frac{ت+٢}{ت+١} \times \frac{ت-٤}{ت-٢} = \frac{ت-٤}{٢} = ٢ - ت$$

$$م = \frac{ت-٤}{ت-٢} \times \frac{ت+٢}{ت+١} = \frac{١٠-ت}{٥} = ٢ - ت$$

$$ل + م = ٢ - ت = ٢ - ت = ٠$$

$$ل م = (٢ - ت) \times (٢ - ت) = ٤ - ٤ت + ت^2 = ٤$$

∴ المعادلة التربيعية التي جذراها ل، م:  $س^2 - (ل + م)س + ل م = 0$

$$∴ س^2 + ٤ = 0$$

حاول أن تحل

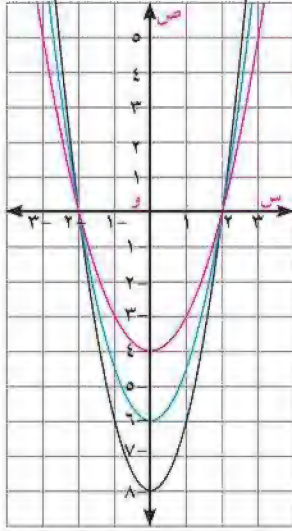
٥) كوّن المعادلة التربيعية في كل مما يأتي بمعلومية جذريها:

$$ج) \frac{٣}{ت} ، \frac{٣+٣}{ت-١}$$

$$ب) ٩ - ت ، ٩$$

$$أ) ٣ ، -٥$$





**تفكير ناقد:** الشكل المجاور يمثل مجموعة من منحنيات بعض الدوال التربيعية التي يمر كل منها بالنقطتين  $(2, 0)$ ،  $(-2, 0)$ . أوجد قاعدة كل دالة من هذه الدوال

### تكوين معادلة تربيعية بمعلومية معادلة تربيعية أخرى

Forming a quadratic equation from the roots of another equation

#### مثال

٦ إذا كان ل، م جذري المعادلة  $x^2 - 3x - 1 = 0$  فكون المعادلة التربيعية التي جذراها ل<sup>٢</sup>، م<sup>٢</sup>.

#### الحل

المعادلة المعلومـة بالتعويض عن  $1 = x^2$ ،  $-3 = x$ ،  $-1 = x^2 - 3x - 1$ : ل، م  $\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^2}$   
المعادلة المطلوبة بالتعويض عن ل، م  $\frac{1}{x} = -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^2}$  في الصيغة  $x^2 - 2x + 1 = 0$  ل، م  
 $\therefore (x^2 - 2x + 1) \times (-\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$   
 $\frac{1}{x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$

#### لاحظ أن

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\therefore (x^2 - 2x + 1) = 0$$

بالتعويض في صيغة المعادلة التربيعية:  $x^2 - 2x + 1 = 0$  (مجموع الجذرين) س + حاصل ضربهما = ٠  
س  $x^2 - 2x + 1 = 0$  بضرب طرفي المعادلة في ٤  
 $\therefore$  المعادلة التربيعية المطلوبة هي:  $x^2 - 13x + 4 = 0$

#### حاول أن تحل

٦ في المعادلة السابقة  $x^2 - 3x - 1 = 0$  كَوْن المعادلات التربيعية التي جذرا كل منها كالاتي:  
أ  $\frac{1}{x}$ ،  $\frac{1}{x}$  ب  $\frac{2}{x}$ ،  $\frac{1}{x}$  ج  $x$ ،  $x$  د  $x$ ،  $x$

#### تحقق من فهمك

١ في كل مما يأتي كون المعادلة التربيعية التي جذراها:  
أ  $\frac{2}{x}$ ،  $\frac{2}{x}$  ب  $3x - 2$ ،  $3x - 2$  ج  $3x + 2$ ،  $3x - 2$  د  $3x + 2$ ،  $3x - 2$   
٢ إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة  $x^2 + 3x - 5 = 0$  فكوْن المعادلة التربيعية التي جذراها ل<sup>٢</sup>، م<sup>٢</sup>.



## تمارين (١ - ٤)



أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ إذا كان  $s = 3$  أحد جذري المعادلة  $s^2 + م s - ٢٧ = ٠$  فإن  $م =$  .....، الجذر الآخر = .....
- ٢ إذا كان حاصل ضرب جذري المعادلة:  $٢ s^2 + ٧ s + ٣ = ٠$  يساوي مجموع جذري المعادلة:  $s^2 - (ك + ٤) s = ٠$  فإن  $ك =$  .....
- ٣ المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد ١ عن كل من جذري المعادلة  $s^2 - ٣ s + ٢ = ٠$  هي .....
- ٤ المعادلة التربيعية التي كل من جذريها ينقص ١ عن كل من جذري المعادلة  $s^2 - ٥ s + ٦ = ٠$  هي .....

ثانياً: الاختيار من متعدد

- ٥ إذا كان أحد جذري المعادلة  $s^4 - ٣ s + ج = ٠$  ضعف الآخر فإن ج تساوي  
 أ - ٤      ب - ٢      ج - ٢      د - ٤
- ٦ إذا كان أحد جذري المعادلة  $s^2 - ٣ s + ٢ = ٠$  معكوساً ضربياً للآخر، فإن أ تساوي  
 أ  $\frac{1}{٣}$       ب  $\frac{1}{٢}$       ج ٢      د ٣
- ٧ إذا كان أحد جذري المعادلة  $s^2 - (ب - ٣) s + ٥ = ٠$  معكوساً جمعياً للآخر، فإن ب تساوي  
 أ - ٥      ب - ٣      ج ٣      د ٥

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية

- ٨ أوجد مجموع وحاصل ضرب جذري كل معادلة فيما يأتي:  
 أ  $٣ s^2 + ١٩ s - ١٤ = ٠$       ب  $٤ s^2 + ٤ s - ٣٥ = ٠$

٩ أوجد قيمة أ ثم أوجد الجذر الآخر للمعادلة في كل مما يأتي:

- أ إذا كان:  $s = -١$  أحد جذري المعادلة  $s^2 - ٢ s + أ = ٠$
- ب إذا كان:  $s = ٢$  أحد جذري المعادلة  $أس^2 - ٥ s + أ = ٠$

١٠ أوجد قيمة أ، ب في كل من المعادلات الآتية إذا كان:

أ ٢، ٥ جذرا المعادلة  $s^2 + أ s + ب = ٠$

ب ٣-، ٧ جذرا المعادلة  $أس^2 - ب s - ٢١ = ٠$

ج ١-،  $\frac{٣}{٢}$  جذرا المعادلة  $أس^2 - س + ب = ٠$

د  $\sqrt{٣}$ ، - $\sqrt{٣}$  جذرا المعادلة  $s^2 + أ s + ب = ٠$



١١) ابحث نوع الجذرين لكل من المعادلات الآتية، ثم أوجد مجموعة حل كل منها:

أ  $س^2 + ٢س - ٣٥ = ٠$  ب  $س^2 + ٣س + ٧ = ٠$

ج  $س(س - ٤) + ٥ = ٠$  د  $س^3(س - ٨) + ١٦ = ٠$

١٢) أوجد قيمة ج التي تجعل جذرى المعادلة  $س^2 - ١٢س + ٩ = ٠$  متساويين.

١٣) أوجد قيمة أ التي تجعل جذرى المعادلة  $س^2 - ٣س + ٢ = ٠$  متساويين.

١٤) أوجد قيمة ج التي تجعل جذرى المعادلة  $س^3 - ٥س + ج = ٠$  متساويين، ثم أوجد الجذرين.

١٥) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذرى المعادلة  $س^2 + (ك - ١)س - ٣ = ٠$  هو المعكوس الجمعى للجذر الآخر.

١٦) أوجد قيمة ك التي تجعل أحد جذرى المعادلة  $٤س^2 + ٧س + ك = ٠$  هو المعكوس الضربى للجذر الآخر.

١٧) كون معادلة الدرجة الثانية التي جذراها كالآتي:

أ  $٤، ٢ -$  ب  $٥ - ت، ٥ ت$  ج  $\frac{٢}{٣}، \frac{٢}{٣}$

د  $١ - ت، ٣ + ت$  هـ  $٣ - ٢\sqrt{٢} - ت، ٣ + ٢\sqrt{٢} - ت$

١٨) أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها ضعفا جذرى المعادلة  $س^2 - ٨س + ٥ = ٠$

١٩) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يزيد بمقدار ١ عن كل من جذرى المعادلة:  $س^2 - ٧س - ٩ = ٠$

٢٠) أوجد المعادلة التربيعية التي كل من جذريها يساوى مربع نظيره من جذرى المعادلة:  $س^2 + ٣س - ٥ = ٠$

٢١) إذا كان ل، م جذرى المعادلة  $س^2 - ٧س + ٣ = ٠$  فأوجد معادلة الدرجة الثانية التي جذراها:

أ  $٢ل، ٢م$  ب  $٢ + ل، ٢ + م$  ج  $\frac{٢}{ل}، \frac{٢}{م}$  د  $ل + م، ل - م$

٢٢ **مساحات:** قطعة أرض على شكل مستطيل بعدها ٦، ٩ من الأمتار، يراد مضاعفة مساحة هذه القطعة وذلك بزيادة طول كل بعد من أبعادها بنفس المقدار. أوجد المقدار المضاف.

٢٣ **تفكير ناقد:** أوجد مجموعة قيم جـ فى المعادلة التربيعية  $٧س^٢ + ١٤س + ج = ٠$  بحيث يكون للمعادلة:

أ جذران حقيقيان مختلفان.

ب جذران حقيقيان متساويان.

ج جذران مركبان.

٢٤ **اكتشف الخطأ:** إذا كان  $ل + ١، م + ١$  هما جذرا المعادلة  $س^٢ + ٥س + ٣ = ٠$  فأوجد المعادلة التربيعية التى جذراها ل، م.

**حل أميرة**

$$\begin{aligned} \therefore ل + م &= -٥، ل م = ٣ \\ \therefore (ل + ١) + (م + ١) &= ٢ + ل + م \\ \therefore ٣ - ٢ &= -٥ - \\ \therefore (ل + ١)(م + ١) &= ل م + (ل + م) + ١ \\ \therefore ١ &= ٣ - ٣ \\ \therefore \text{المعادلة هى: } س^٢ + ٣س + ١ &= ٠ \end{aligned}$$

**حل يوسف**

$$\begin{aligned} \therefore (ل + ١) + (م + ١) &= -٥ \\ \therefore ل + م + ٢ &= -٥ \\ \therefore ل + م &= -٧ \\ \therefore (ل + ١)(م + ١) &= ٣ \\ \therefore ل م + (ل + م) + ١ &= ٣ \\ \therefore ل م - ٧ + ١ &= ٣ \\ \therefore ل م &= ٩ \\ \therefore \text{المعادلة هى: } س^٢ + ٧س + ٩ &= ٠ \end{aligned}$$

٢٥ **تفكير ناقد:** إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة  $س^٢ + كس + ٢ك = ٠$  يساوى ضعف حاصل ضرب جذرى المعادلة  $س^٢ + ٣س + ك = ٠$  فأوجد ك.



## إشارة الدالة

### Sign of the Function

٥ - ١

#### سوف نتعلم

- بحث إشارة كل من:  
الدالة الثابتة - دالة الدرجة الأولى - دالة الدرجة الثانية.



سبق أن درست التمثيل البياني لدالة الدرجة الأولى ودالة الدرجة الثانية، وتعرفت على الشكل العام لمنحنى كل دالة. فهل يمكنك بحث إشارة كل من هذه الدوال؟ المقصود ببحث إشارة الدالة هو تحديد قيم المتغير  $x$  (مجال  $x$ ) التي تكون عندها قيم الدالة  $f(x)$  على النحو الآتي:

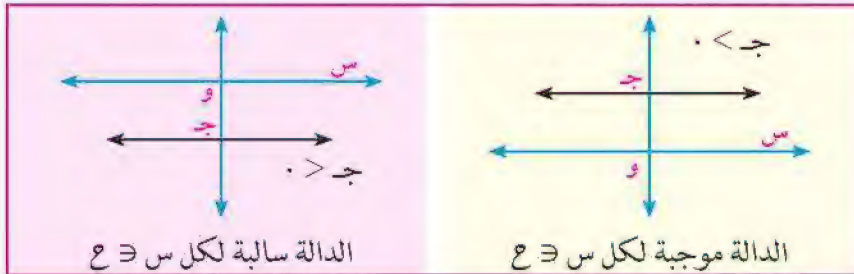
- موجبة، أي  $f(x) > 0$
- سالبة، أي  $f(x) < 0$
- مساوية للصفر  $f(x) = 0$



#### المصطلحات الأساسية

- إشارة دالة Sign of a function
- دالة ثابتة Constant Function
- دالة خطية (دالة الدرجة الأولى) Linear Function
- دالة تربيعية (دالة الدرجة الثانية) Quadratic Function

**أولاً: إشارة الدالة الثابتة** First: The sign of the Constant Function  
إشارة الدالة الثابتة  $f(x) = c$  (حيث  $c$  ثابت) هي نفس إشارة  $c$  لكل  $x$ .  
والشكل التالي يوضح إشارة الدالة  $c$ .



#### مثال

١) عين إشارة كل من الدوال الآتية:

ب)  $f(x) = -7$

أ)  $f(x) = 0$

الحل

• إشارة الدالة موجبة لكل  $x \in \mathbb{R}$

أ)  $f(x) < 0$

• إشارة الدالة سالبة لكل  $x \in \mathbb{R}$

ب)  $f(x) > 0$

#### الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

## حاول أن تحل

١ عین إشارة کل من الدوال الآتية:

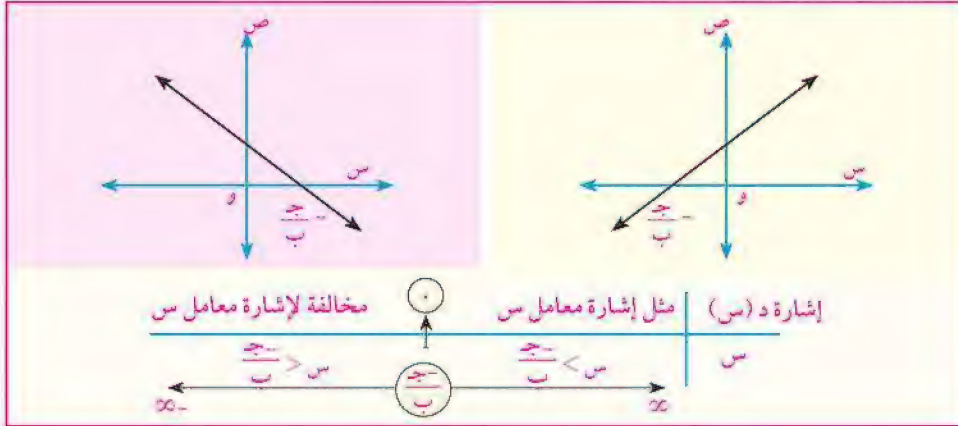
ب د (س) =  $\frac{0}{3}$

أ د (س) =  $\frac{2}{3}$

## Second: Sign of the Linear Function

## ثانيًا: إشارة دالة الدرجة الأولى (الدالة الخطية)

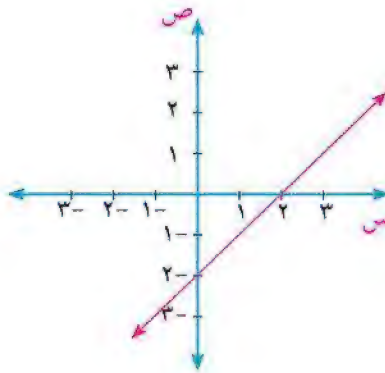
قاعدة الدالة د هي د (س) = ب س + ج ، ب  $\neq 0$  ، والشكل البياني التالي يوضح إشارة الدالة د.



## مثال

٢ عین إشارة الدالة د حيث د (س) = س - ٢ مع توضيح ذلك بيانيًا:

الحل



قاعدة الدالة: د (س) = س - ٢

رسم الدالة:

عندما د (س) = ٠ فإن س = ٢

عندما س = ٠ فإن د (س) = -٢

من الرسم نجد أن:

◀ الدالة موجبة عندما س &lt; ٢

◀ الدالة د (س) = ٠ عندما س = ٢

◀ الدالة سالبة عندما س &gt; ٢

## حاول أن تحل

٢ عین إشارة الدالة د (س) = -٢س - ٤ مع توضيح ذلك بيانيًا.



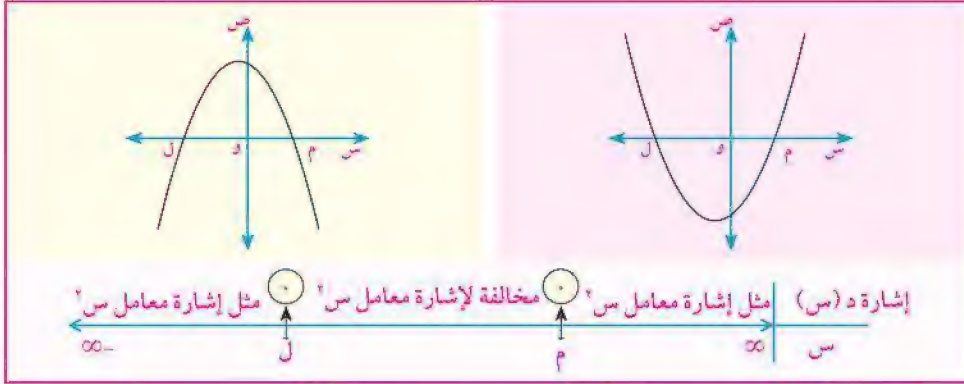
### Third: Sign of the Quadratic Function.

### ثالثاً: إشارة الدالة التربيعية

لتعيين إشارة الدالة التربيعية د، حيث  $D(s) = as^2 + bs + c$ ، حيث  $a > 0$ ،  $b$  و  $c$  حقيقيان،  $a \neq 0$ ، فإننا نوجد للمعادلة جذران حقيقيان  $s_1$  و  $s_2$ ، وبفرض أن  $s_1 < s_2$ ، تكون إشارة الدالة كما في الأشكال الآتية:

نوجد مميز المعادلة  $as^2 + bs + c = 0$  فإذا كان:

أولاً:  $b^2 - 4ac < 0$  فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان  $s_1$  و  $s_2$ ، وبفرض أن  $s_1 < s_2$ ، تكون إشارة الدالة كما في الأشكال الآتية:



### مثال

٢ مثل بياناً د، حيث  $D(s) = s^2 - 2s - 3$  ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

بتحليل المعادلة:  $s^2 - 2s - 3 = 0$

$$0 = (s - 3)(s + 1)$$

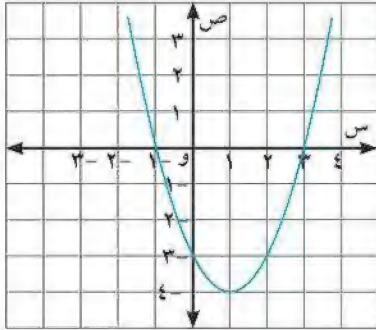
فيكون جذرا المعادلة:  $s_1 = 3, s_2 = -1$

من الرسم نجد أن:

$$D(s) < 0 \text{ عندما } s \in (-1, 3)$$

$$D(s) > 0 \text{ عندما } s \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$$

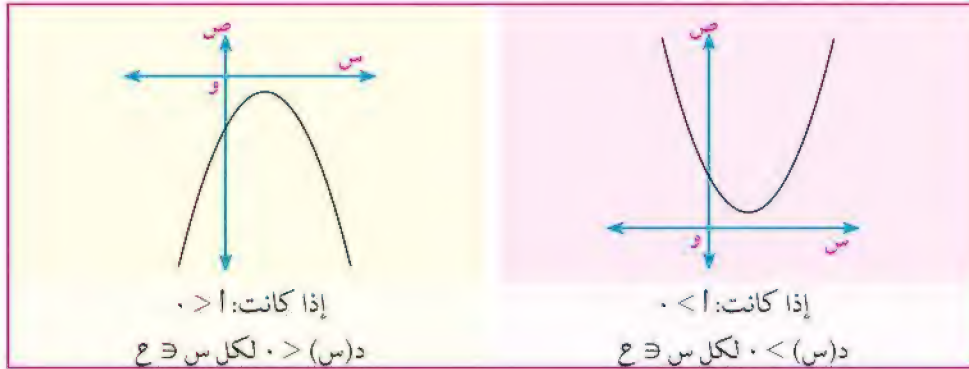
$$D(s) = 0 \text{ عندما } s \in \{-1, 3\}$$



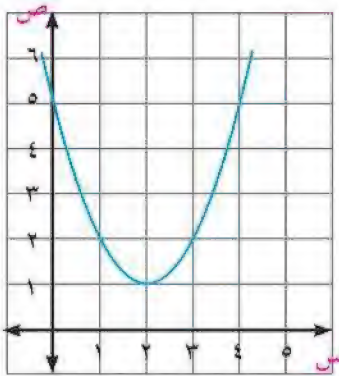
### حاول أن تحل

٣ مثل بياناً د، حيث  $D(s) = s^2 - 6s + 8$  ثم عين إشارة الدالة د.

**ثانيًا:** إذا كان:  $b^2 - 4ac > 0$  فإنه لا توجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل  $a$ ، والأشكال التالية توضح ذلك.



### مثال



④ مثل بيانيًا د حيث  $d(س) = س^2 - 4س + 5$  ثم عين إشارة الدالة د.

**الحل**

$$\text{المميز (ب}^2 - 4\text{أ ج)} = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5$$

$$= 16 - 20 = -4 < 0$$

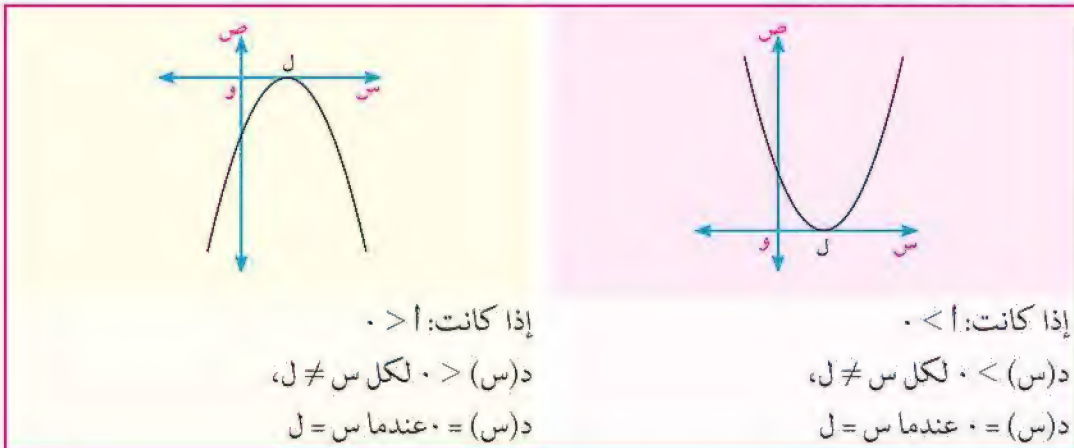
لذلك فإن المعادلة  $س^2 - 4س + 5 = 0$  ليس لها جذور حقيقية  
إشارة الدالة موجبة لكل  $س \in \mathbb{R}$  (لأن معامل  $س^2 > 0$ )

### حاول أن تحل

④ مثل بيانيًا د، حيث  $d(س) = -س^2 - 2س - 4$  ثم عين إشارة الدالة د.

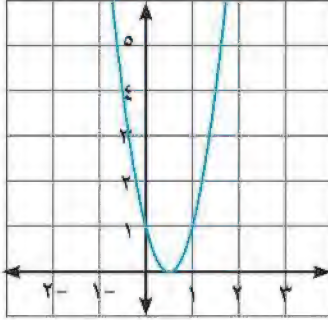
**ثالثًا:** إذا كان:  $b^2 - 4ac = 0$  فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوي  $ل$ ، وتكون إشارة الدالة د كالاتي:  
 $\hookleftarrow$  مثل إشارة  $ا$  عندما  $س \neq ل$   
 $\hookleftarrow$  د(س) = 0 عندما  $س = ل$

والأشكال الآتية توضح ذلك.





### مثال



٥ مثل بيانيًا د حيث د(س) =  $س^2 - ٤س + ١$ ، ثم عين إشارة الدالة د.

الحل

$$\text{المميز (بـ } ٤ - ٤ \text{ جـ)} = (-٤)^2 - ١ \times ٤ \times ٤ =$$

$$٠ = ١٦ - ١٦ =$$

لذلك فإن المعادلة  $س^2 - ٤س + ١ = ٠$  لها جذران متساويان.

بالتحليل:  $٠ = (١ - س)^2$

بوضع:  $٠ = ١ - س^٢$  تكون س =  $\frac{1}{٢}$

د(س) < ٠ عندما س  $\neq \frac{1}{٢}$ ، د(س) = ٠ عندما س =  $\frac{1}{٢}$

حاول أن تحل

٥ مثل بيانيًا د، حيث د(س) =  $-س^2 - ٤س - ١٢$ ، ثم عين إشارة الدالة د.

### مثال

٦ اثبت أنه لجميع قيم س  $\exists$  يكون جذرا المعادلة  $س^٢ - ٢س + ك - ٣ = ٠$  صفر حقيقيين مختلفين

الحل

$$\text{المميز (بـ } ٤ - ٤ \text{ جـ)} = (-٢)^2 - ٢ \times ٤ \times (ك - ٣) = ٢٤ + ك - ٨$$

يكون جذرا المعادلة حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجبا

نبحث إشارة المقدار ص =  $٢٤ + ك - ٨$

فيكون مميز المعادلة  $ك - ٨ + ٢٤ = ٠$  هو:

$$٠ > ٣٢ - ٩٦ - ٦٤ = ٢٤ \times ١ \times ٤ - (٨ -)$$

ليس لها جذور حقيقية

$$ك - ٨ + ٢٤ = ٠$$

لذلك فإن المعادلة

موجبة لكل س  $\exists$  (لماذا؟)

$$ص = ٢٤ + ك - ٨$$

إشارة المقدار

موجب لكل س  $\exists$

$$س^٢ - ٢س + ك - ٣ = ٠$$

فيكون مميز المعادلة

حقيقيان مختلفان لكل س  $\exists$

$$س^٢ - ٢س + ك - ٣ = ٠$$

جذرا المعادلة

### تحقق من فهمك

١ عين إشارة كل دالة من الدوال الآتية:

ج د(س) =  $س^2 - ٤$

ب د(س) =  $س - ٤$

أ د(س) =  $س^2 - ٣$

٩ د(س) =  $س^3 - ٢س^2 + ٤$

ه د(س) =  $س^2 + ٤س + ٤$

د د(س) =  $١ - س^٢$

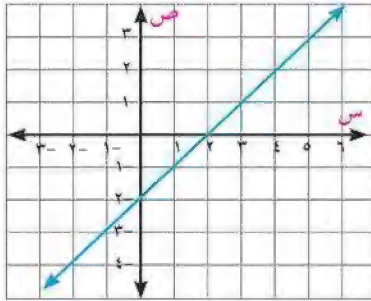


## تمارين (١ - ٥)



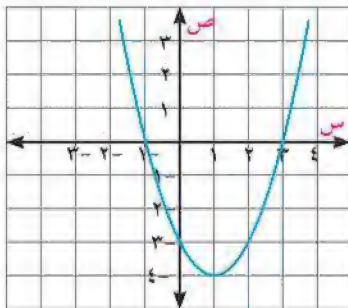
أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ الدالة د، حيث د(س) = -٥ إشاراتها ..... في الفترة .....
- ٢ الدالة د، حيث د(س) = س<sup>٢</sup> + ١ إشاراتها ..... في الفترة .....
- ٣ الدالة د، حيث د(س) = س<sup>٢</sup> - ٦ س + ٩ موجبة في الفترة .....
- ٤ الدالة د، حيث د(س) = س - ٢ موجبة في الفترة .....
- ٥ الدالة د، حيث د(س) = ٣ - س سالبة في الفترة .....
- ٦ الدالة د، حيث د(س) = - (س - ١) (س + ٢) موجبة في الفترة .....
- ٧ الدالة د، حيث د(س) = س<sup>٢</sup> + ٤ س - ٥ سالبة في الفترة .....



٨ الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الأولى في س:

- أ د(س) موجبة في الفترة .....
- ب د(س) سالبة في الفترة .....



٩ الشكل المرسوم يمثل دالة من الدرجة الثانية في س:

- أ د(س) = ٠ عندما س = ٠
- ب د(س) < ٠ عندما س = ٠
- ج د(س) > ٠ عندما س = ٠

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

١٠ في التمارين من أ إلى ن عين إشارة كل من الدوال الآتية:

- |                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
| أ د(س) = ٢                | ب د(س) = ٢ س                |
| ج د(س) = -٣ س             | د د(س) = ٢ س + ٤            |
| هـ د(س) = ٣ - ٢ س         | و د(س) = س <sup>٢</sup>     |
| ز د(س) = ٢ س <sup>٢</sup> | ح د(س) = ٤ - س <sup>٢</sup> |



ط د(س) = ١ - س<sup>٢</sup> .....  
 ك د(س) = (٢ - س) س<sup>٢</sup> .....  
 م د(س) = س<sup>٢</sup> - ٨ س + ١٦ .....  
 ي د(س) = (س - ٢) (س + ٣) .....  
 ل د(س) = س<sup>٢</sup> - س - ٢ .....  
 ن د(س) = -٤ س<sup>٢</sup> + ١٠ س - ٢٥ .....

- ١١ ارسم منحنى الدالة د(س) = س<sup>٢</sup> - ٩ فى الفترة [٣، ٤]، ومن الرسم عين إشارة د(س).  
 ١٢ ارسم منحنى الدالة د(س) = -س<sup>٢</sup> + ٢ س + ٤ فى الفترة [٣، ٥]، ومن الرسم عين إشارة د(س).  
 ١٣ **اكتشف الخطأ:** إذا كانت د(س) = س + ١، ر(س) = ١ - س<sup>٢</sup> فعين الفترة التى تكون فيها الدالتان موجبتين معًا.

**حل أميرة**

س = -١ .....  
 د(س) موجبة فى الفترة [١، ∞)،  
 س = ١ ± .....  
 ر(س) موجبة فى الفترة [١، ١]  
 لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة  
 [١، ∞) ∩ [١، ١] = [١، ١]

**حل يوسف**

س = -١ .....  
 د(س) موجبة فى الفترة [١، ∞)،  
 س = ١ ± .....  
 ر(س) موجبة فى الفترة [١، ١]  
 لذلك فإن الدالتين تكونان موجبتين معًا فى الفترة  
 [١، ∞) ∪ [١، ١] = [١، ∞)

أى الإجابتين يكون صحيحًا؟ مثل كلاً من الدالتين بيانًا وتأكّد من صحة الإجابة.

- ١٤ **مناجم الذهب:** فى الفترة من عام ١٩٩٠ إلى ٢٠١٠ كان إنتاج أحد مناجم الذهب مقدّرًا بالآلاف أوقية يتحدد بالدالة د: د(ن) = ١٢ ن<sup>٢</sup> - ٩٦ ن + ٤٨٠ حيث ن عدد السنوات، د(ن) إنتاج الذهب  
 أولاً: ابحث إشارة دالة الإنتاج د.  
 ثانياً: أوجد إنتاج منجم الذهب مقدّرًا بالآلاف أوقية فى كل من العامين ١٩٩٠، ٢٠٠٥  
 ثالثاً: فى أى عام كان إنتاج المنجم مساوياً ٢٠١٦ ألف أوقية؟

## متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد

## Quadratic Inequalities

سوف نتعلم

Quadratic Inequalities

المتباينات التربيعية:

حل المتباينة التربيعية في متغير واحد.



سبق أن درست متباينة الدرجة الأولى في مجهول واحد، وعلمت أن حل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المجهول التي تحقق هذه المتباينة، وتكتب على صورة فترة، فهل يمكنك حل متباينة الدرجة الثانية في مجهول واحد؟

لاحظ أن:

س<sup>٢</sup> - س - ٢ < ٠ هي متباينة تربيعية كما هو موضح بالشكل التالي

المصطلحات الأساسية

Inequality

متباينة

بينما د(س) = س<sup>٢</sup> - س - ٢ هي الدالة التربيعية المرتبطة بهذه المتباينة.

من الشكل المقابل نجد أن:

مجموعة حل المتباينة

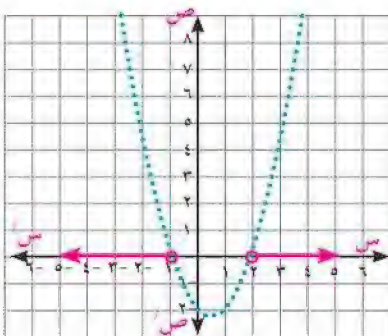
س<sup>٢</sup> - س - ٢ < ٠ في ح

هي  $]-\infty, -1[ \cup ]2, \infty[$

مجموعة حل المتباينة

س<sup>٢</sup> - س - ٢ > ٠ في ح

هما  $[-1, 2]$



الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية



## حل المتباينة التربيعية

مثال

١ حل المتباينة: س<sup>٢</sup> - ٥س - ٦ < ٠



## الحل

لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية:  
خطوة (١): نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة وذلك كالآتي:

$$د(س) = س^2 - ٥س - ٦$$

خطوة (٢): ندرس إشارة الدالة د حيث د(س) = س^2 - ٥س - ٦ ،

ونوضحها على خط الأعداد بوضع د(س) = ٠

$$٠ = س^2 - ٥س - ٦$$

$$٠ = (س - ٦)(س + ١)$$

$$س = ٦ ، س = -١$$



خطوة (٣): تحدد الفترات التي تحقق المتباينة س^2 - ٥س - ٦ < ٠



فيكون مجموعة حل المتباينة هي:  $]-∞, -١[ \cup ]٦, ∞[$

## حاول أن تحل

١ حل كلاً من المتباينات الآتية:

ب)  $س^2 + س + ١٢ < ٠$

أ)  $س^2 + ٢س - ٨ < ٠$

## مثال

٢ حل المتباينة:  $(س + ٣)^2 \geq ١٠ - ٣(س + ٣)$

## الحل

$$\therefore (س + ٣)^2 \geq ١٠ - ٣(س + ٣)$$

$$\therefore س^2 + ٦س + ٩ \geq ١٠ - ٣س - ٩$$

$$\therefore س^2 + ٩س + ٨ \geq ٠$$

$$س^2 + ٩س + ٨ = ٠$$

$$(س + ٨)(س + ١) = ٠$$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي:

بالتحليل إلى عوامل:

مجموعة حل المعادلة:  $\{-٨, -١\}$

★ ويوضح خط الأعداد التالي إشارة الدالة د(س) = س^2 + ٩س + ٨



وعلى ذلك فإن: مجموعة حل المتباينة هي :  $[-8, -1]$

### حاول أن تحل

٢ حل المتباينات الآتية:

ب  $٠ \leq (٣ + س)^٢ + ٣(٣ + س) - ١٠$

أ  $٥٥س^٢ + ١٢س \leq ٤٤$

### تحقق من فهمك

١ ما الفرق بين معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد ومتباينة الدرجة الثانية في متغير واحد؟

٢ ما علاقة بحث إشارة الدالة التربيعية بحل متباينات الدرجة الثانية في متغير واحد؟

٣ **اكتشف الخطأ:** أوجد مجموعة حل المتباينة  $٤(١ - س)^٢ > ٤(٢ - س)$

#### حل نور

$$٠ < ٤(١ - س)^٢ > ٤(٢ - س)$$

$$٠ < س^٢ + ٢س + ١ > ١ + ٢س - ١٦س + ١٦س^٢$$

$$٠ < ١٥س^٢ - ١٨س + ٣$$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي:

$$٠ = (١ - س)(٥ - س)$$

مجموعة الحل هي  $\{١, \frac{١}{٥}\}$



★ بحث إشارة الدالة د حيث

$$د(س) = ١٥س^٢ - ١٨س + ٣$$

نجد أن:

مجموعة حل المتباينة هي  $ح - [\frac{١}{٥}, ١]$

#### حل يوسف

$$٠ < ٤(١ - س)^٢ > ٤(٢ - س)$$

$$٠ < س^٢ + ٢س + ١ > ١ + ٢س - ١٦س + ١٦س^٢$$

التربيعي للطرفين

$$٠ < ٤س^٢ + ٢س + ١ > ١ + ٢س - ١٦س + ١٦س^٢$$

$$٠ < ٣س^٢ - ١٤س + ٣$$

المعادلة المرتبطة بالمتباينة هي:

$$٠ = ٣س^٢ - ١٤س + ٣$$

مجموعة الحل هي  $\{١\}$



★ بحث إشارة الدالة د حيث

$$د(س) = ٣س^٢ - ١٤س + ٣$$

مجموعة حل المتباينة هي  $١, \infty]$

٤ **تفكير ناقذ:** أوجد مجموعة حل المتباينة  $١٠ - ٣(٣ + س) > ٤(٣ + س)^٢$





## تمارين (١ - ٦)



أوجد مجموعة الحل للمتباينات التربيعية الآتية:

١)  $x^2 \geq 9$

٢)  $x^2 - 1 \geq 0$

٣)  $x^2 - 3x > 0$

٤)  $x^2 + 5 \geq 1$

٥)  $(x-2)(x-5) > 0$

٦)  $x^2 - (x+2) - 3 \geq 0$

٧)  $(x-2)^2 \geq 5$

٨)  $5 - x^2 \geq x^2$

٩)  $x^2 \leq 6 - x$

١٠)  $3x^2 \geq 11x + 4$

١١)  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

١٢)  $7 + x^2 - 4x > 0$

# ملخص الوحدة

١ حل المعادلة: أس<sup>٢</sup> + ب س + ج = ٠ حيث أ، ب، ج ∈ ح، أ ≠ ٠

الطريقة
التحليل إلى العوامل
إكمال المربع
استخدام القانون العام
التمثيل البياني

٢ بحث نوع جذرى المعادلة التربيعية

يسمى المقدار (ب<sup>٢</sup> - ٤أج) بمميز المعادلة التربيعية الذى يبين نوع جذور المعادلة وعدد حلولها كالآتى:

★ (ب<sup>٢</sup> - ٤أج) < ٠ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

★ ب<sup>٢</sup> - ٤أج = ٠ يوجد جذر حقيقى واحد مكرر (جذران متساويان).

★ ب<sup>٢</sup> - ٤أج > ٠ يوجد جذران مركبان غير حقيقيين.

٣ الأعداد المركبة:

العدد المركب هو الذى يمكن كتابته على الصورة أ + ب ت، حيث أ، ب عدنان حقيقيان، ب هو الجزء التخيلى، والجدول التالى يبين قوى ت للأسس الصحيحة الموجبة:

ت <sup>١</sup> = ١	ت <sup>٢</sup> = ٢	ت <sup>٣</sup> = ٣	ت <sup>٤</sup> = ٤
ت	١ -	ت -	١

تساوى عددين مركبين: إذا كان: أ + ب ت = ج + د ت فإن أ = ج، ب = د والعكس صحيح

خواص العمليات: يمكن استخدام خواص الإبدال والتجميع والتوزيع عند جمع أو ضرب الأعداد المركبة، وعند جمع أو طرح الأعداد المركبة تجمع الأجزاء الحقيقية معًا وتجمع الأجزاء التخيلية معًا.

العدنان المترافقان: يسمى العدنان أ + ب ت ، أ - ب ت بالعددين المترافقين

حيث ناتج جمعهما عدد حقيقى، وحاصل ضربهما عدد حقيقى أيضًا.

## ملخص الوحدة

٤ مجموع وحاصل ضرب جذرى المعادلة التربيعية:

إذا كان جذرا المعادلة  $أس^2 + ب س + ج = ٠$  هما ل، م فإن:  $ل + م = -\frac{ب}{أ}$  ،  $ل م = \frac{ج}{أ}$

٥ تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها:

إذا كانت ل، م جذرى المعادلة التربيعية، فإن المعادلة التربيعية تكون على الصورة الآتية:

$$★ (س - ل)(س - م) = ٠$$

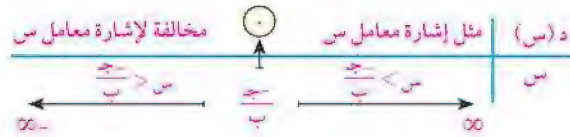
★ إذا كان ل + م =  $-\frac{ب}{أ}$  ،  $ل م = \frac{ج}{أ}$  فإن المعادلة هي  $أس^2 - (ل + م)س + ل م = ٠$

٦ بحث إشارة الدالة:

★ إشارة الدالة الثابتة د، حيث د(س) = ج، (ج ≠ ٠) هي نفس إشارة ج لكل س ∈ ℝ.

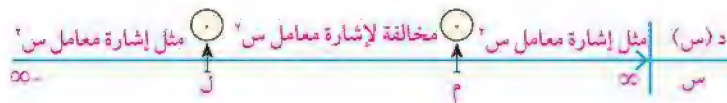
★ قاعدة الدالة الخطية د هي د(س) = ب س + ج ، ب ≠ ٠

فتكون س = -  $\frac{ج}{ب}$  عندما د(س) = ٠ والشكل التالى يمثل إشارة الدالة د:



★ لتعين إشارة الدالة د، حيث د(س) =  $أس^2 + ب س + ج$ ، أ ≠ ٠ فإننا نوجد المميز

★ إذا كان: ب<sup>2</sup> - ٤أج < ٠ فإن إشارة الدالة د تتحدد حسب الشكل التالى:



★ إذا كان: ب<sup>2</sup> - ٤أج = ٠ فإنه يوجد للمعادلة جذران متساويان، وليكن كل منهما يساوى ل، وتكون إشارة

الدالة د كالتالى: مثل إشارة أ عندما س ≠ ل ، د(س) = ٠ عندما س = ل

★ إذا كان: ب<sup>2</sup> - ٤أج > ٠ فإنه لا توجد جذور حقيقية، وتكون إشارة الدالة د مثل إشارة معامل س<sup>٢</sup>.



٧ حل متباينات الدرجة الثانية في مجهول واحد:

لحل المتباينة التربيعية نتبع الخطوات الآتية :

١- نكتب الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة  $ص = د(س)$  في الصورة العامة.

٢- ندرس اشارة الدالة  $د$  المرتبطة بالمتباينة ونوضحها على خط الأعداد.

٣- تحديد مجموعة حل المتباينة طبقاً للفترات التي تحققها.

### @ معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:



## التشابه

## Similarity

## أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على:

- يستدعي ما سبق دراسته بالمرحلة الإعدادية على موضوع التشابه.
- يتعرف تشابه مضلعين.
- يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (إذا تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان).
- يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، و تناسب أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين).
- يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج الحقيقة التي تنص على: (المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسم إلى ...)
- يتعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين تساوى ...)
- يتعرف ويستنتج التمرين المشهور الذي ينص على: (إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للوترين في دائرة فإن ... وعكسه ونتائج عليه).

## المصطلحات الأساسية

Tangent	مماس	Corresponding Sides	أضلاع متناظرة	Ratio	نسبة
Diameter	قطر	Congruent Angles	زوايا متطابقة	Proportion	تناسب
Common External Tangent	مماس خارجي مشترك	Regular Polygon	مضلع منتظم	Measure of an Angle	قياس زاوية
Common Internal Tangent	مماس داخلي مشترك	Quadrilateral	شكل رباعي	Length	طول
Concentric Circles	دوائر متحدة المركز	Pentagon	شكل خماسي	Area	مساحة
		Postulate/Axiom	بديهية	Cross Product	ضرب تبادلي
		Perimeter	محيط	Extreme	طرف
		Area of polygon	مساحة مضلع	Mean	وسط
	نسبة التشابه (معامل التشابه)	Chord	وتر	Similar Polygons	مضلعان متشابهة
Similarity Ratio		Secant	قاطع	Similar Triangles	مثلثات متشابهة



## دروس الوحدة

- الدرس (٢ - ١): تشابه المضلعات.  
 الدرس (٢ - ٢): تشابه المثلثات.  
 الدرس (٢ - ٣): العلاقة بين مساحتي سطحي  
 مضلعين متشابهين.  
 الدرس (٢ - ٤): تطبيقات التشابه في الدائرة.

## الأدوات المستخدمة

حاسب آلي - جهاز عرض بيانات - برامج رسومية  
 - ورق مربعات - مرآة مستوية - أدوات قياس - آلة  
 حاسبة.



## نبذة تاريخية

عند البناء على قطعة من الأرض نحتاج إلى عمل رسم تخطيطي للمبنى، ومن البديهي أنه لا يمكن عمل هذا الرسم الهندسي على قطعة من الورق تطابق قطعة الأرض، وإنما نلجأ إلى عمل صورة مصغرة تشابه الصورة الطبيعية للمبنى، وذلك باتخاذ مقياس رسم مناسب للحصول على هذا التصغير، وقياسات زوايا على الرسم، بحيث تساوي قياسات نظائرها في الواقع.

إذا تأملت الشكل الموضح في بداية الصفحة تلاحظ أن الطبيعة مليئة بأشكال تحتوي على أنماط تكرر نفسها بمقاييس مختلفة، ومن أمثلة ذلك أوراق الشجر، ورأس زهرة القرنبيط، وتعرُّجات ساحل البحر. ملاحظة هذه الأنماط المتكررة أدى إلى ظهور هندسة جديدة منذ قرابة 40 عامًا، والتي تهتم بدراسة الأشكال ذاتية التماثل والتي تتكرر بغير انتظام، وقد أطلق عليها اسم هندسة الفثافيت أو هندسة الكسوريات fractals والتي سوف تدرسها في مراحل تعليمية تالية.

## مخطط تنظيمي للوحدة





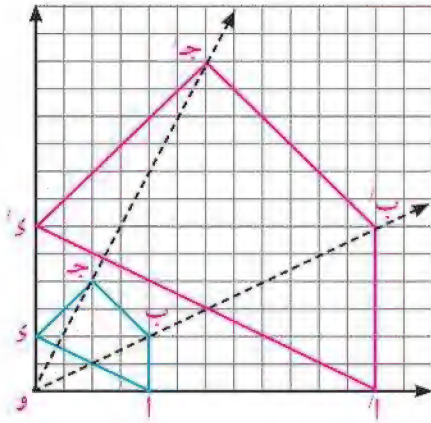
## تشابه المضلعات

### Similarity of Polygons

١ - ٢

#### سوف نتعلم

- مفهوم التشابه.
- تشابه المضلعات.
- مقياس الرسم.
- المستطيل الذهبي والنسبة الذهبية.



#### فكر g ناقش

يوضح الشكل المقابل المضلع أ ب ج د وصورته أ' ب' ج' د' بتحويل هندسي.

أ) قارن بين قياسات الزوايا المتناظرة:

$$\angle أ، \angle أ' - \angle ب، \angle ب'$$

$$\angle ج، \angle ج' - \angle د، \angle د'$$

ماذا تستنتج؟

ب) أوجد النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة  $\frac{أ' ب'}{أ ب}$ ،  $\frac{ب' ج'}{ب ج}$ ،  $\frac{ج' د'}{ج د}$ ،  $\frac{د' أ'}{د أ}$

ماذا تلاحظ؟

عندما يكون للمضلعات الشكل نفسه، وإن اختلفت في أطوال أضلاعها، فإنها تسمى مضلعات متشابهة.

#### Similar polygons

#### المضلعات المتشابهة

«يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة».

#### تعريف

#### لاحظ أن:

١- في الشكل الموضح ببند فكر وناقش نجد:

$$\angle أ \equiv \angle أ'، \angle ب \equiv \angle ب'، \angle ج \equiv \angle ج'، \angle د \equiv \angle د'$$

$$\frac{أ' ب'}{أ ب} = \frac{ب' ج'}{ب ج} = \frac{ج' د'}{ج د} = \frac{د' أ'}{د أ}$$

$$\frac{أ' ب'}{أ ب} = \frac{ب' ج'}{ب ج} = \frac{ج' د'}{ج د} = \frac{د' أ'}{د أ}$$

ولذلك يمكننا القول أن الشكل أ' ب' ج' د' يشابه الشكل أ ب ج د

٢- نستخدم الرمز (~) للتعبير عن تشابه مضلعين، ويراعى ترتيب كتابتهما رؤوسهما المتناظرة حتى يسهل كتابة التناسب بين الأضلاع المتناظرة.

#### المصطلحات الأساسية

مضلعات متشابهة

Similar Polygons

مثلثات متشابهة

Similar Triangles

أضلاع متناظرة

Corresponding Sides

زوايا متطابقة

Congruent Angles

مضلع منتظم

Regular Polygon

شكل رباعي

Quadrilateral

شكل خماسي

Pentagon

نسبة التشابه (معامل التشابه)

Similarity Ratio

#### الأدوات والوسائل

حاسب آلي

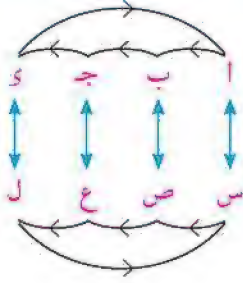
جهاز عرض بيانات

برامج رسومية

ورق مربعات

أدوات قياس

آلة حاسبة



إذا كان المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل فإن:

أ  $\angle ا \equiv \angle س$  ،  $\angle ب \equiv \angle ص$  ،  $\angle ج \equiv \angle ع$  ،  $\angle د \equiv \angle ل$

ب  $\frac{ا ب}{س ص} = \frac{ب ج}{ص ع} = \frac{ج د}{ع ل} = \frac{د ا}{ل س} = ك$  (نسبة التشابه)،  $ك \neq 0$ .

ويكون معامل تشابه المضلع أ ب ج د للمضلع س ص ع ل = ك،

و معامل تشابه المضلع س ص ع ل للمضلع أ ب ج د =  $\frac{1}{ك}$

### مثال

١ في الشكل المقابل: المضلع أ ب ج د ~ المضلع هـ و ز ح.

أ أوجد معامل تشابه المضلع أ ب ج د

للمضلع هـ و ز ح.

ب أوجد قيم س، ص.

الحل

∴ المضلع أ ب ج د ~ المضلع هـ و ز ح

فيكون:  $\frac{ا ب}{هـ و} = \frac{ب ج}{و ز} = \frac{ج د}{ز ح} = \frac{د ا}{ح هـ} =$  معامل التشابه،

$$\frac{2+ص}{6} = \frac{ب ج}{و ز} = \frac{10}{8} = \frac{15}{س}$$

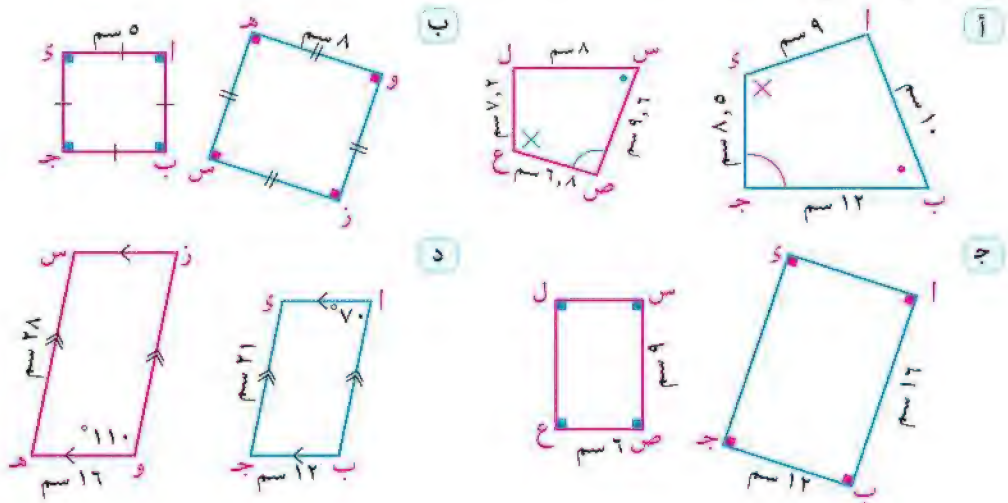
أ معامل التشابه =  $\frac{3}{6} = \frac{12}{8}$

ب  $\frac{3}{6} = \frac{15}{س} \rightarrow س = 10$  ،  $\frac{3}{6} = \frac{2+ص}{6} \rightarrow ص = 7$  سم

### حاول أن تحل

١ بين أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة

وحدد نسبة التشابه.

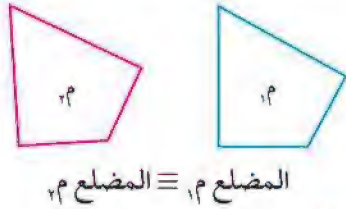




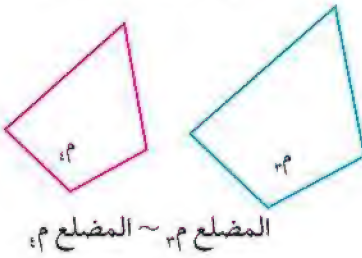
## فكر

- هل جميع المربعات متشابهة؟  
هل جميع المستطيلات متشابهة؟  
هل جميع المعينات متشابهة؟  
هل جميع متوازيات الأضلاع متشابهة؟ فسر إجابتك.

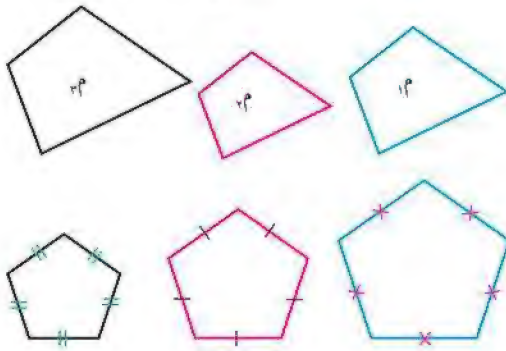
## لاحظ أن



١- لكي يتشابه مضلعان يجب أن يتوافر الشرطان معاً، ولا يكفي توافر أحدهما دون الآخر.



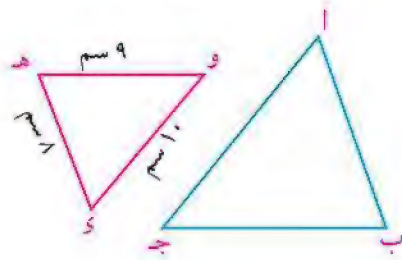
٢- المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين، وذلك لتوافر شرط التشابه (المضلع م1 ~ المضلع م2) ويكون معامل التشابه لهما عندئذٍ مساوياً (واحد) ولكن ليس من الضروري أن يكون المضلعان المتشابهان متطابقين (المضلع م1 ≇ المضلع م2) كما في الشكل المقابل.



٣- المضلعان المشابهان لثالث متشابهان  
فإذا كان المضلع م1 ~ المضلع م2،  
المضلع م2 ~ المضلع م3  
فإن: المضلع م1 ~ المضلع م3

٤- كل المضلعات المنتظمة التي لها نفس العدد من الأضلاع تكون متشابهة. لماذا؟

## مثال



٢ في الشكل المقابل:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  و هو،

و هو = ٨ سم ، و هو = ٩ سم ، و هو = ١٠ سم

إذا كان محيط  $\triangle ABC$  = ٨١ سم.

أوجد أطوال أضلاع  $\triangle DEF$ .

## الحل

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

(خواص التناسب)

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF}$$

$$\text{ويكون: } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

$$\therefore AB = 8 \times \frac{81}{27} = 24 \text{ سم ، } BC = 9 \times 3 = 27 ، CA = 10 \times 3 = 30$$

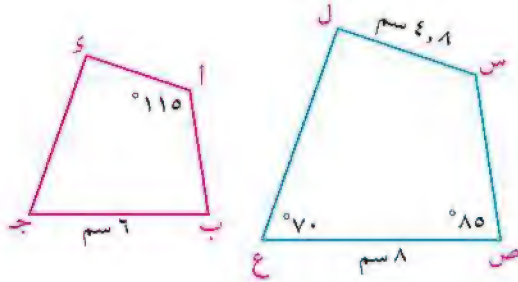


## لاحظ أن:

إذا كان المضلع  $M_1 \sim$  المضلع  $M_2$ ، فإن  $\frac{\text{محيط المضلع } M_1}{\text{محيط المضلع } M_2} = \text{نسبة التشابه (معامل التشابه)}$

## حاول أن تحل:

٢ في الشكل المقابل:



المضلع  $ABCD \sim$  المضلع  $EFGH$

أ احسب  $\angle H$  (س ل ع)، طول  $\overline{AD}$

ب إذا كان محيط المضلع  $ABCD = 19,5$  سم

أوجد محيط المضلع  $EFGH$ .

## Similarity ratio of two polygons

## معامل التشابه لمضلعين:

ليكن  $k$  معامل تشابه المضلع  $M_1$  للمضلع  $M_2$ .

إذا كان:  $k < 1$  فإن المضلع  $M_1$  هو تكبير للمضلع  $M_2$ .

$k > 1$  فإن المضلع  $M_1$  هو تصغير للمضلع  $M_2$ .

$k = 1$  فإن المضلع  $M_1$  يطابق المضلع  $M_2$ .

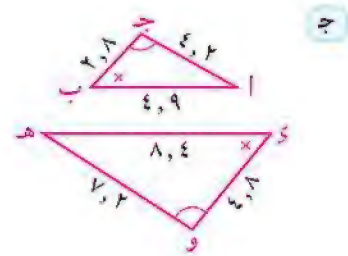
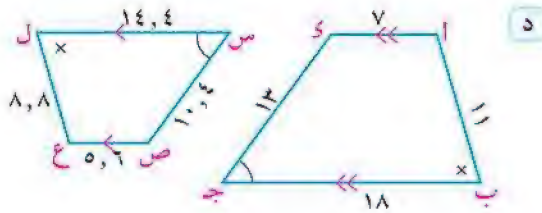
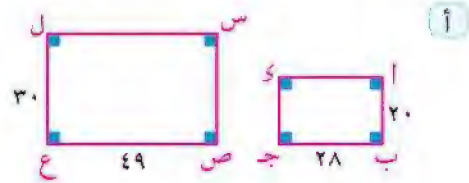
وبصفة عامة يمكن استخدام معامل التشابه في حساب أبعاد الأشكال المتشابهة.



## تمارين ٢ - ١



١ بين أيًا من أزواج المضلعات التالية تكون متشابهة، واكتب المضلعات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة، وحدد معامل التشابه (الأطوال مقطرة بالسنتيمترات).



٢ إذا كان المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل، أكمل:

أ  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{س ص}{ص ع}$

ب  $أ ب \times ع ل = س ص \times \dots$

ج  $\frac{ب ج + ص ع}{ص ع} = \frac{ل س + \dots}{ل س}$

د  $\frac{س ص}{أ ب} = \frac{\text{محيط المضلع س ص ع ل}}{\text{محيط المضلع أ ب ج د}}$

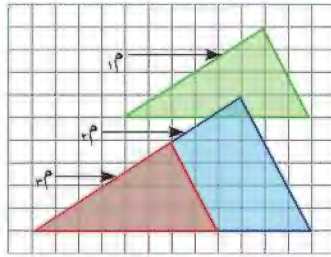
٣ المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل. فإذا كان: أ ب = ٣٢ سم، ب ج = ٤٠ سم، س ص = ٣ م - ١، ص ع = ٣ م + ١. أوجد قيمة م العددية.

٤ مستطيل بعده ١٠ سم، ٦ سم. أوجد محيط ومساحة مستطيل آخر مشابه له إذا كان:

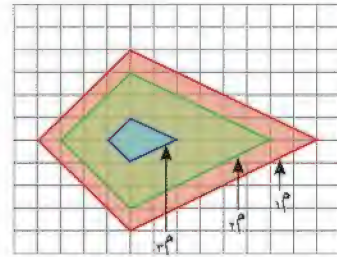
أ معامل التشابه ٣

ب معامل التشابه ٤, ٠

٥) في كل من الأشكال التالية المضلع م<sub>١</sub> ~ المضلع م<sub>٢</sub> ~ المضلع م<sub>٣</sub>.  
أوجد معامل تشابه كل من المضلع م<sub>١</sub>، المضلع م<sub>٢</sub>، المضلع م<sub>٣</sub> للمضلع م<sub>١</sub>.

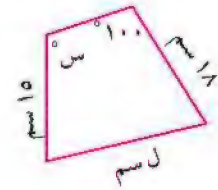
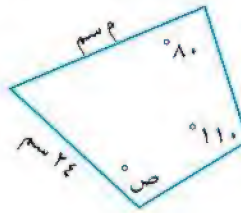
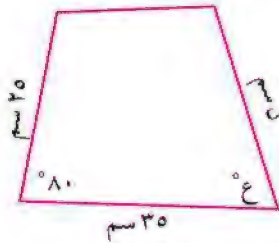


ب



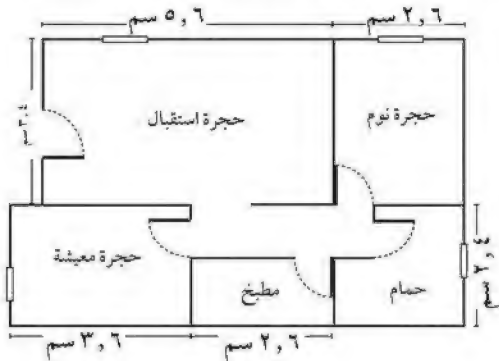
ا

٦) المضلعات الثلاثة التالية متشابهة. أوجد القيمة العددية للرمز المستخدم في القياس.



٧) مستطيلان متشابهان بُعد الأول ٨ سم، ١٢ سم، ومحيط الثاني ٢٠٠ سم. أوجد طول المستطيل الثاني ومساحته.

### نشاط



٨) هندسة معمارية: يوضح الشكل المقابل مخططاً

لأحدى الوحدات السكنية بمقياس رسم ١ : ١٥٠ أوجد:

أ) أبعاد حجرة الاستقبال.

ب) أبعاد حجرة النوم.

ج) مساحة حجرة المعيشة.

د) مساحة الوحدة السكنية.



## تشابه المثلثات

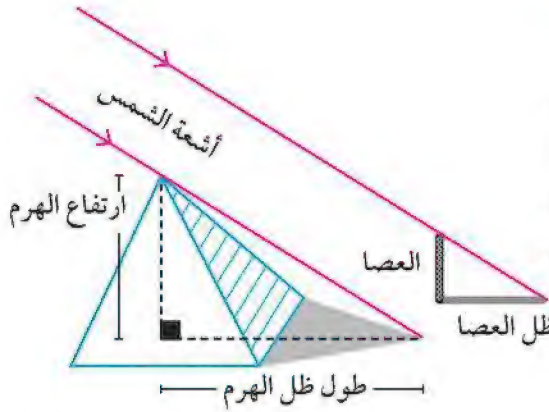
### Similarity of Triangles

٢ - ٢

#### سوف نتعلم

- حالات تشابه المثلثات.
- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في المثلث القائم الزاوية.

#### فكر g ناقش



طلب أحد ملوك الفراعنة إلى الرياضي طاليس (٦٠٠ ق.م) أن يوجد ارتفاع الهرم الأكبر، ولم تكن هناك أجهزة أو آلات أو طريقة لإيجاد ارتفاع الهرم مباشرة. ثبت طاليس عصا رأسياً

وبدأ يقيس ظل العصا ويقارنه بطول العصا نفسها إلى أن جاء وقت وجد فيه أن طول ظل العصا يساوي الطول الحقيقي للعصا نفسها. فقام بقياس طول ظل الهرم، وكان هو ارتفاع الهرم نفسه.

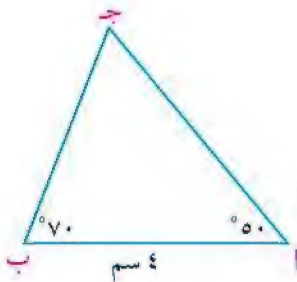
#### المصطلحات الأساسية

Postulate / Axiom

بديهية

إذا طلب منك قياس ارتفاع سارية العلم باستخدام عصا وشريط مدرج فهل تنتظر حتى يصبح طول ظل العصا مساوياً لطول العصا نفسها أو يمكنك قياس ارتفاع سارية العلم في أي وقت من يوم مشمس؟ فسر إجابتك.

#### عمل تعاوني



١- ارسم  $\triangle$  أ ب ج الذي فيه:

$$\angle A = 50^\circ, \angle B = 70^\circ, \angle C = 60^\circ$$

٢- ارسم  $\triangle$  د ه و الذي فيه:

$$\angle D = 50^\circ, \angle H = 70^\circ, \angle W = 60^\circ$$

٣- أوجد بالقياس لأقرب مليمتر أطوال كل من: أ ج، ب ج، ج و، ه و

٤- استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد النسب  $\frac{أ ج}{د ه}$ ،  $\frac{ب ج}{ه و}$ ،  $\frac{أ ب}{د ه}$

هل النسب متساوية؟ ماذا تستنتج عن هذين المثلثين؟

قارن نتائجك مع نتائج المجموعات الأخرى واكتب ملاحظاتك.

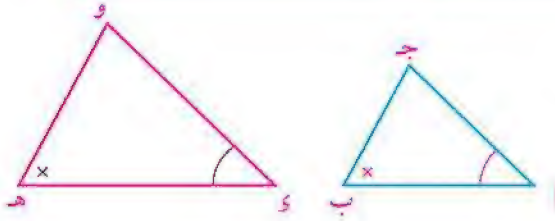
#### الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- مراة مستوية
- أدوات قياس
- آلة حاسبة

## postulate (or axiom)

إذا طابقت زاويتان في مثلث نظائريهما في مثلث آخر كان المثلثان متشابهين.

مسلمة

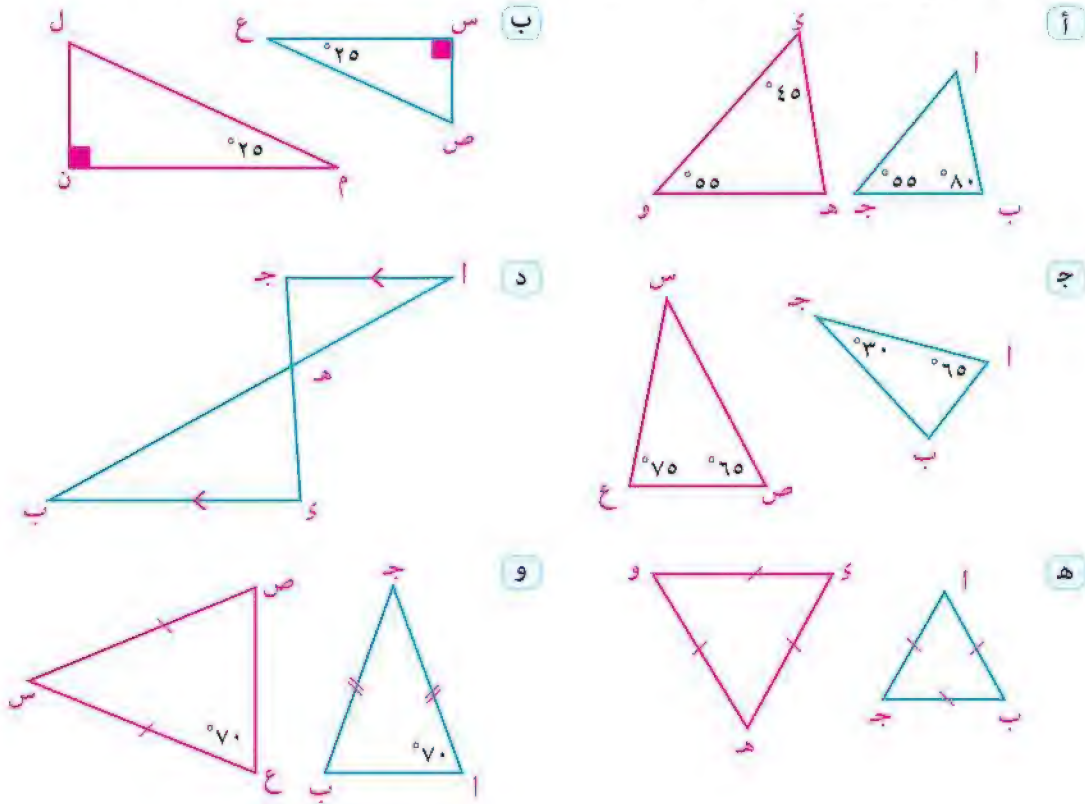


في الشكل المقابل:

إذا كان  $\angle A \equiv \angle D$  ،  $\angle B \equiv \angle E$  ،  
فإن  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

## حاول أن تحل

١ بين أيًا من أزواج المثلثات التالية تكون متشابهة. اكتب المثلثات المتشابهة بترتيب الرؤوس المتناظرة.



## لاحظ أن

- ١- المثلثان المتساويا الأضلاع متشابهان. (كما في هـ)
- ٢- يتشابه المثلثان متساويا الساقين إذا ساوى قياس إحدى زاويتي القاعدة في أحدهما قياس إحدى زاويتي القاعدة في المثلث الآخر: (كما في ٩) أو إذا تساوى قياسا زاويتي رأسيهما.
- ٣- يتشابه المثلثان القائمة الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في المثلث الآخر (كما في ب).

## مثال

١ في المثلث  $أ ب ج$ ،  $د \in \overline{أ ب}$ ،  $هـ \in \overline{أ ج}$  حيث  $\overline{د هـ} \parallel \overline{ب ج}$ ،

$ب د = ١,٢$  سم،  $أ هـ = ٣$  سم،  $أ ج = ٤$  سم،  $د هـ = ٢,٤$  سم.

أ أثبت أن  $\triangle أ د هـ \sim \triangle أ ب ج$

ب أوجد طول كل من:  $\overline{أ د}$ ،  $\overline{ب ج}$

الحل

أ  $\because \overline{د هـ} \parallel \overline{ب ج}$ ،  $\overline{أ ب}$  قاطع لهما.

$\therefore \triangle أ د هـ \equiv \triangle أ ب ج$

في المثلثين  $أ د هـ$ ،  $أ ب ج$

$\therefore \triangle أ د هـ \equiv \triangle أ ب ج$

$\triangle أ هـ د \equiv \triangle أ ج ب$

$\therefore \triangle أ د هـ \sim \triangle أ ب ج$

ب  $\because \triangle أ د هـ \sim \triangle أ ب ج$

$\therefore \frac{أ د}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ ج} = \frac{د هـ}{ب ج}$  ويكون:

$$\frac{٤,٢}{ب ج} = \frac{٣}{١,٢ + أ د}$$

$$٤,٢ (١,٢ + أ د) = ٣ ب ج$$

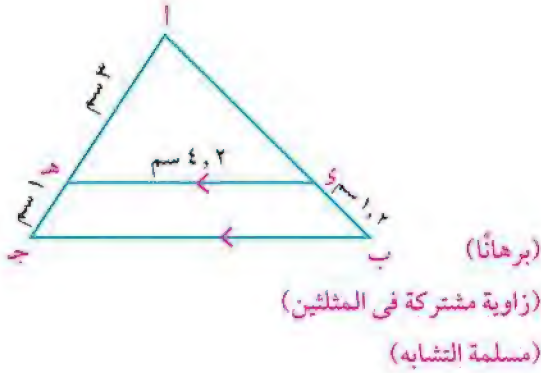
$$٣,٦ + ٤,٢ أ د = ٣ ب ج$$

$$أ د = ٣,٦$$

$$٤,٢ \times ٤ = ٣ ب ج$$

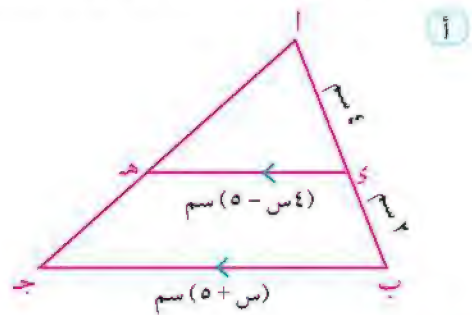
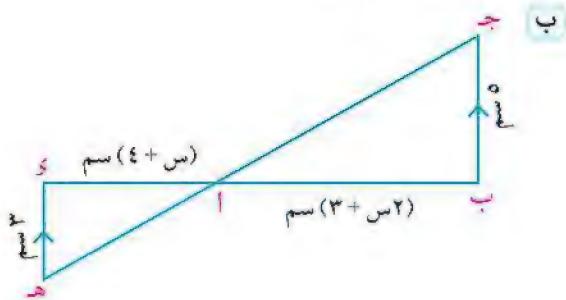
$$\frac{٤,٢ \times ٤}{٣} =$$

$$ب ج = ٥,٦$$



## حاول أن تحل

٢ في كل من الأشكال التالية، أثبت أن  $\triangle أ ب ج \sim \triangle أ د هـ$  ثم أوجد قيمة س.

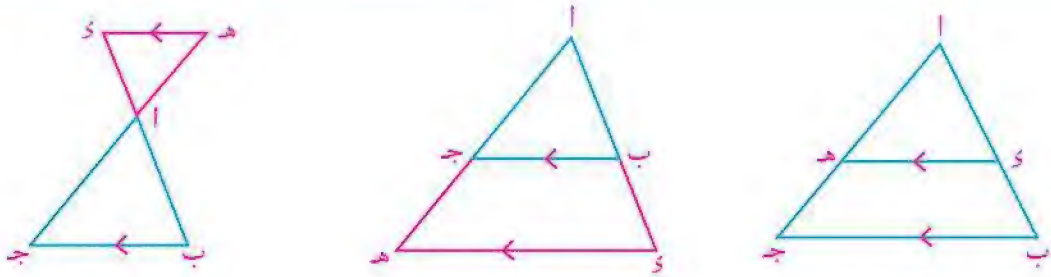


## نتائج هامة

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

نتيجة ١



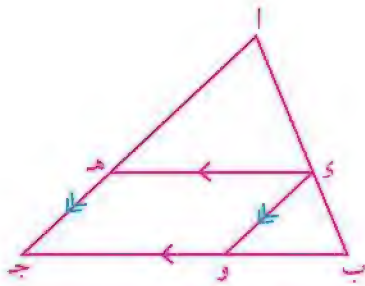


إذا كان  $\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$  ويقطع  $\overline{أ ب}$ ،  $\overline{أ ج}$  في  $د$ ،  $ه$  على الترتيب كما في الأشكال الثلاثة السابقة:  
فإن:  $\triangle ا د ه \sim \triangle ا ب ج$ .

## مثال

٢ في الشكل المقابل:  $أ ب ج$  مثلث،  $د \in \overline{أ ب}$ ، رسم  $\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$  ويقطع  $\overline{أ ج}$  في  $ه$ ،  $\overline{د و} \parallel \overline{أ ج}$  ويقطع  $\overline{ب ج}$  في  $و$ .  
برهن أن:  $\triangle ا د ه \sim \triangle ا ب ج$  و  $\triangle د ب و \sim \triangle ا ب ج$

الحل

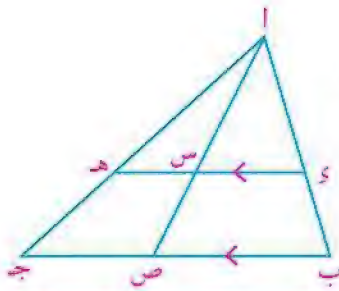


- (١)  $\therefore \triangle ا د ه \sim \triangle ا ب ج$   $\because \overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$   
(٢)  $\therefore \triangle د ب و \sim \triangle ا ب ج$   $\because \overline{د و} \parallel \overline{أ ج}$   
من (١)، (٢) ينتج أن:  $\triangle ا د ه \sim \triangle ا ب ج$  و  $\triangle د ب و \sim \triangle ا ب ج$  (وهو المطلوب)

## حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل:  $أ ب ج$  مثلث،  $د \in \overline{أ ب}$ ، رسم  $\overline{د ه} \parallel \overline{ب ج}$  ويقطع  $\overline{أ ج}$  في  $ه$ ، رسم  $\overline{أ س}$  يقطع  $\overline{د ه}$ ،  $\overline{ب ج}$  في  $س$ ،  $ص$  على الترتيب.  
أ اذكر ثلاثة أزواج من المثلثات المتشابهة.

ب أثبت أن:  $\frac{د ه}{ب ج} = \frac{س ه}{ص ج} = \frac{س د}{ص ب}$ .



**نتيجة ٢** إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.

في الشكل المقابل:  $أ ب ج$  مثلث قائم الزاوية في  $ا$ ،  $\overline{أ د} \perp \overline{ب ج}$   
 $\triangle ا ب د$  و  $\triangle ا د ج$  فيهما

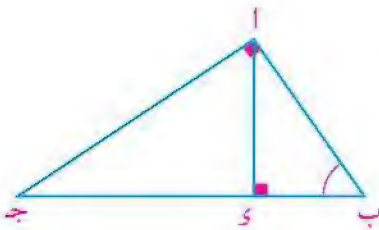
وه  $(\angle ا ب د) = 90^\circ$  و  $(\angle ا د ج) = 90^\circ$ ،  $\angle د$  مشتركة في المثلثين.

$\therefore \triangle ا ب د \sim \triangle ا د ج$  (مسلمة التشابه) (١)

وبالمثل  $\triangle ا د ج \sim \triangle ا ب ج$  (٢)

$\therefore$  المثلثان المشابهان لثالث متشابهان

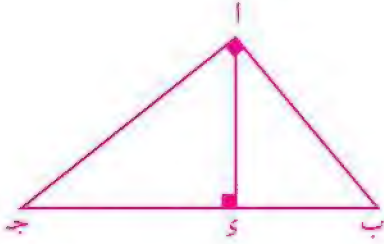
$\therefore \triangle ا ب د \sim \triangle ا د ج \sim \triangle ا ب ج$



### مثال

٣) أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ،  $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$  أثبت أن  $أ$  وسط متناسب بين  $ب$ ،  $جـ$ .

الحل



المعطيات: في  $\triangle أب جـ$ :  $\angle أ = 90^\circ$ ،  $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$

المطلوب: إثبات أن  $أ = ب \times جـ$

البرهان: في  $\triangle أب جـ$

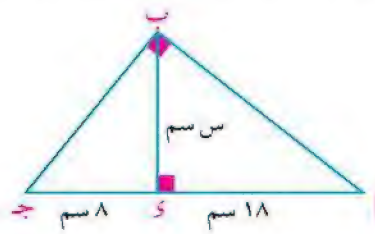
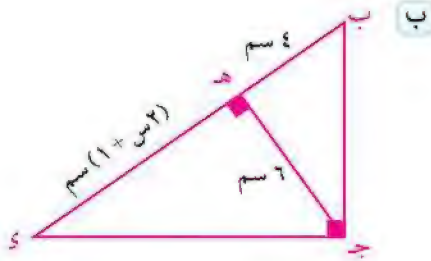
$\therefore \angle أ = 90^\circ$ ،  $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$

$\therefore \triangle أب أ \sim \triangle أ جـ أ$  (نتيجة)

ويكون:  $\frac{أ}{ب} = \frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{جـ}$  أى أن  $أ = ب \times جـ$

### حاول أن تحل

٤) في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة  $س$  العددية:



### مثال

٤) في الشكل المقابل أب جـ مثلث قائم الزاوية في أ،

$\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$  أثبت أن:

أ)  $أ = ب \times جـ$

ب)  $أ = جـ \times جـ$

الحل

في  $\triangle أب جـ$ :

$\therefore \angle أ = 90^\circ$ ،  $\overline{أى} \perp \overline{ب جـ}$

$\therefore \triangle أب أ \sim \triangle أ جـ أ$  (نتيجة)

ويكون:  $\frac{أ}{ب} = \frac{أ}{جـ} = \frac{ب}{جـ}$

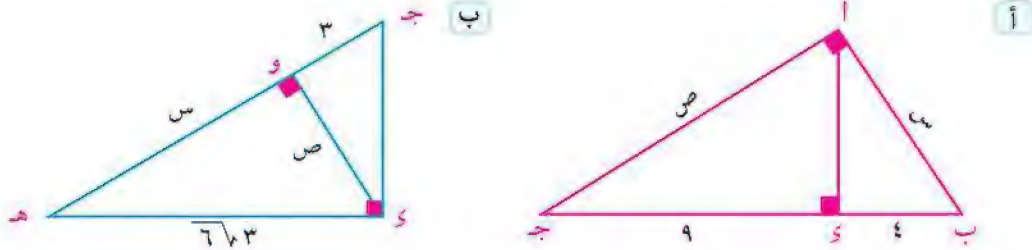
$\therefore \triangle أب أ \sim \triangle أ جـ أ$  (نتيجة)

ويكون:  $أ = جـ \times جـ$

نعد النتائج التي تم إثباتها في مثالي ٣، ٤ برهاناً لنظرية أقليدس التي سبق لك دراستها في المرحلة الإعدادية.

## حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة س، ص العددية في أبسط صورة (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات)



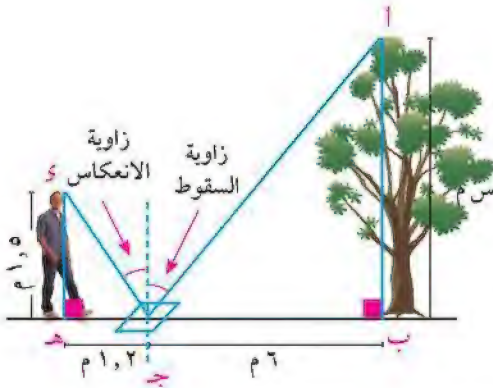
## Indirect measurement

## القياس غير المباشر

في بعض الحالات يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة، وفي هذه الحالة يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة.

إحدى الطرق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية، كما في المثال التالي.

## مثال



٥ **فيزياء:** أراد يوسف أن يعرف ارتفاع إحدى الأشجار فوضع مرآة على مسافة ٦ أمتار من قاعدة الشجرة، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى قمة الشجرة في وسط المرآة - عند هذه النقطة كان يوسف قد تحرك بعيداً عن المرآة مسافة ١,٢ متر وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق سطح الأرض. فإذا كانت قدماء والمرآة وقاعدة الشجرة على استقامة واحدة أوجد ارتفاع الشجرة. علماً بأن قياس زاوية السقوط = قياس زاوية الانعكاس.

## الحل

بفرض أن ارتفاع الشجرة س مترًا، قياس زاوية السقوط =  $\theta$

∴ قياس زاوية الانعكاس =  $\theta$

في المثلثين أ ب ج، و ه ج

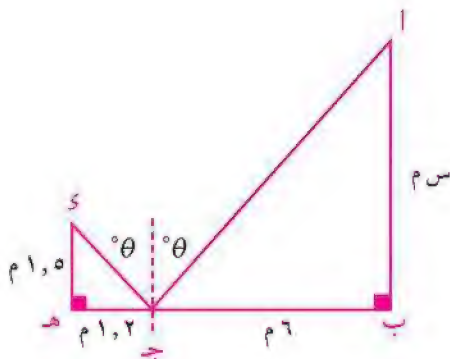
$\angle أ ب ج = \angle و ه ج = 90^\circ$

$\angle أ ج ب = \angle و ه ج = (\theta - 90^\circ)$

∴  $\triangle أ ب ج \sim \triangle و ه ج$  ويكون:  $\frac{أ ب}{و ه} = \frac{ب ج}{ه ج}$

∴  $\frac{6}{1.2} = \frac{س}{1.5}$  ويكون س = ٧,٥ متر

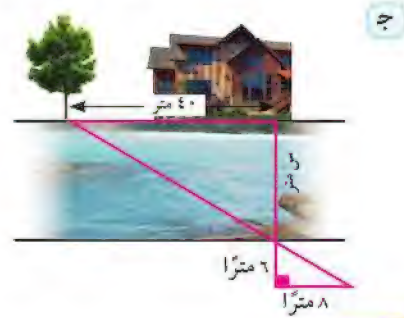
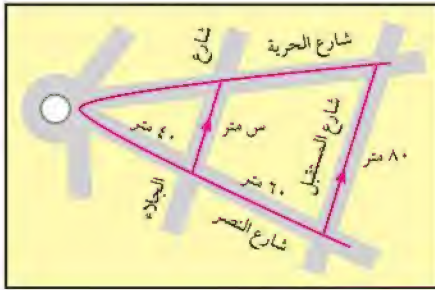
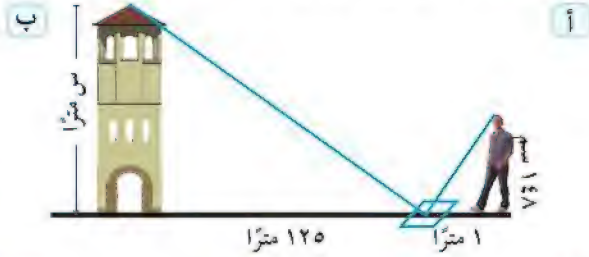
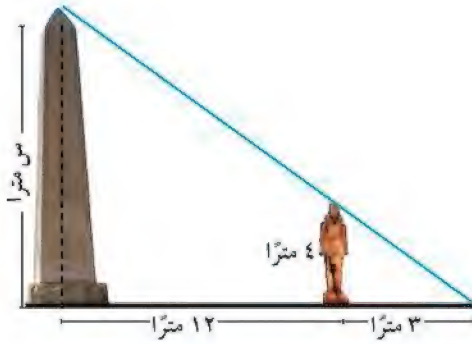
أي أن ارتفاع الشجرة يساوي ٧,٥ مترًا.





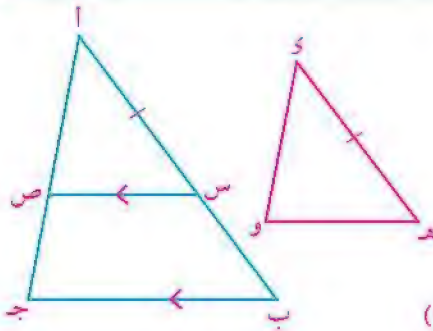
## حاول أن تحل

٦ أوجد المسافة س في كل من الحالات الآتية:



## نظرية

إذا تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.



(نتيجة (١))

(عملاً)

(١)

(معطيات) (٢)

المعطيات: المثلثان  $\triangle ABC$  و  $\triangle DEF$  وهما  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

المطلوب:  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

البرهان: عيّن  $S$  على  $AB$  حيث  $AS = DE$

ارسم  $SV \parallel BC$  ويقطع  $AC$  في  $V$ .

$\therefore SV \parallel BC$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ASV$

ويكون  $\frac{AB}{AS} = \frac{BC}{SV} = \frac{AC}{AV}$

$\therefore AS = DE$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{SV} = \frac{AC}{AV}$

$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

من (١)، (٢) ينتج أن:  $SV = DE$ ،  $SV = AC$

ويكون  $\triangle ASV \equiv \triangle DEF$

$\therefore \triangle DEF \sim \triangle ASV$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ASV$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$

(برهاننا)

(وهو المطلوب)

(تطابق الأضلاع الثلاثة لنظائرها في الآخر)

## مثال

٦ في الشكل المقابل: ب، ص، جـ على استقامة واحدة. أثبت أن:

أ  $\triangle اب ج \sim \triangle س ب ص$

ب  $\overrightarrow{ب ج}$  ينصف  $\triangle اب س$

## الحل

أ في المثلثين اب ج، س ب ص نجد أن:

$$\frac{اب}{س ب} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣} \quad ، \quad \frac{ب ج}{ب ص} = \frac{٦+١٨}{١٨} = \frac{٤}{٣}$$

$$\frac{ا ج}{س ص} = \frac{١٨}{١٣,٥} = \frac{٤}{٣}$$

$$\text{ويكون } \frac{اب}{س ب} = \frac{ب ج}{ب ص} = \frac{ا ج}{س ص}$$

$$\therefore \triangle اب ج \sim \triangle س ب ص$$

ب  $\therefore \triangle اب ج \sim \triangle س ب ص$

أي أن:  $\overrightarrow{ب ج}$  ينصف  $\triangle اب س$

أي أن الأضلاع المتناظرة متناسبة

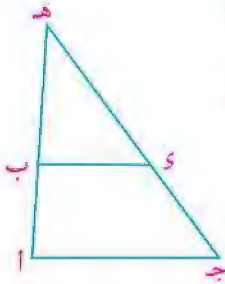
$$\therefore \triangle اب ج = \triangle س ب ص$$

٧ في الشكل المقابل:  $\overrightarrow{ا ب} \cap \overrightarrow{ج د} = هـ$  حيث  $\frac{ا هـ}{هـ د} = \frac{ب هـ}{هـ د}$ ،  $\frac{ا ج}{ج هـ} = \frac{ب د}{د هـ}$  أثبت أن  $\overrightarrow{ا ج} \parallel \overrightarrow{ب د}$

## الحل

(١) (من خواص التناسب)

(٢) (من خواص التناسب)



$$\therefore \frac{ا هـ}{هـ د} = \frac{ب هـ}{هـ د} \quad \therefore \frac{ا ج}{ج هـ} = \frac{ب د}{د هـ}$$

$$\therefore \frac{ا ج}{ج هـ} = \frac{ب د}{د هـ} \quad \therefore \frac{ا ج}{ج هـ} = \frac{ب د}{د هـ}$$

$$\text{من (١)، (٢) ينتج أن: } \frac{ا هـ}{هـ د} = \frac{ب هـ}{هـ د} = \frac{ا ج}{ج هـ} = \frac{ب د}{د هـ}$$

$$\text{أي أن } \triangle ا هـ ج \sim \triangle ب هـ د$$

$$\therefore \triangle ا هـ ج = \triangle ب هـ د$$

وهما في وضع تناظر بالنسبة للقاطع  $\overrightarrow{ج هـ}$

$$\therefore \overrightarrow{ا ج} \parallel \overrightarrow{ب د}$$

## حاول أن تحل

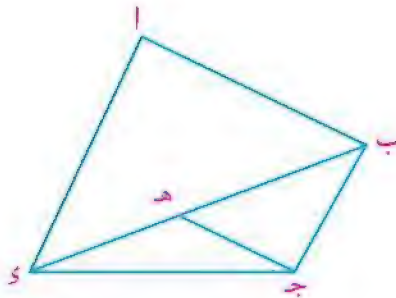
٧ اب ج د شكل رباعي، هـ  $\in$   $\overrightarrow{ب د}$  حيث:

$$\frac{ا ب}{ب د} = \frac{ج هـ}{هـ د}, \quad \frac{ا ج}{ج د} = \frac{ب هـ}{هـ د}$$

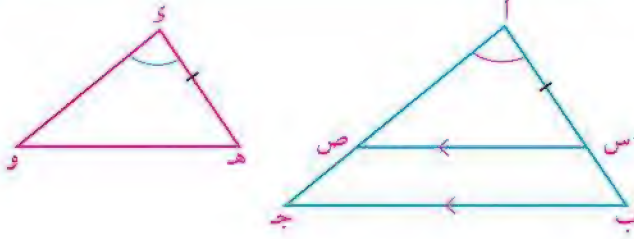
$$\text{أثبت أن:}$$

أ  $\overrightarrow{ا د} \parallel \overrightarrow{ب ج}$

ب  $\overrightarrow{ا ب} \parallel \overrightarrow{ج هـ}$



**نظرية ٢** إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان، كان المثلثان متشابهين.



المعطيات:  $\angle ا \equiv \angle س$  ،  $\frac{ا ب}{و هـ} = \frac{ا ج}{و س}$

المطلوب:  $\Delta ا ب ج \sim \Delta س هـ و$

البرهان: خذ  $س \in \overline{ا ب}$  حيث  $ا س = و هـ$

وارسم  $\overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$

ويقطع  $\overline{ا ج}$  في  $ص$

$\therefore \overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$

ويكون  $\frac{ا ب}{ا س} = \frac{ا ج}{ا ص}$

$\therefore \frac{ا ب}{و هـ} = \frac{ا ج}{و س}$  (معطى) ،  $ا س = و هـ$  (عملا)

$\therefore \frac{ا ب}{ا س} = \frac{ا ج}{ا ص}$  ويكون  $ا ص = و س$

$\therefore \Delta ا س ص \equiv \Delta و هـ و$  (ضلعان وازوية محصورة)

ويكون  $\Delta ا س ص \sim \Delta و هـ و$

من (١)، (٢) ينتج أن:  $\Delta ا ب ج \sim \Delta و هـ و$  وهو المطلوب.

(٢)

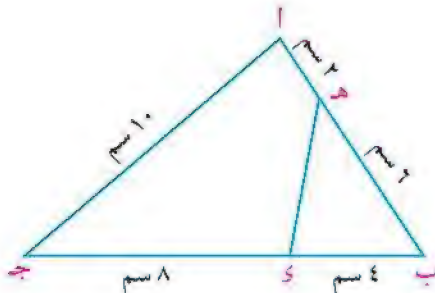
### مثال

٨) ا ب ج مثلث، ا ب = ٨ سم، ا ج = ١٠ سم، ب ج = ١٢ سم، هـ  $\in \overline{ا ب}$  حيث ا هـ = ٢ سم،  $و \in \overline{ب ج}$  حيث ب و = ٤ سم.

أ) برهن أن  $\Delta ا ب و \sim \Delta ا ج و$  واستنتج طول و هـ.

ب) برهن أن الشكل ا ج و هـ رباعي دائري.

الحل



$\therefore ا ب = ٨$  سم، ا هـ = ٢ سم  $\therefore ب هـ = ٦$  سم

أ) المثلثان ب و هـ، ب ا ج فيهما:

(١)  $\angle ب هـ و \equiv \angle ب ا ج$

$\frac{ب و}{ب ا} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$  ،  $\frac{ب هـ}{ب ج} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{ب و}{ب ا} = \frac{ب هـ}{ب ج}$

من (١)، (٢)  $\therefore \Delta ا ب و \sim \Delta ا ج و$  (نظرية)

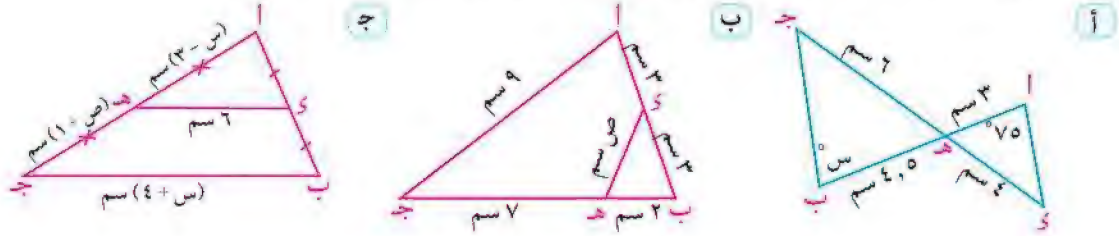
من التشابه  $\frac{و هـ}{ا ج} = \frac{و ب}{ا ب}$   $\therefore و هـ = \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$  سم ،  $و هـ = \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$  سم



ب) من التشابه أيضًا  $\triangle ب ي ه \equiv \triangle ب ا ج$   $\therefore \triangle ب ي ه = \triangle ب ا ج$   $\therefore$  الشكل الرباعي ا ج ي ه رباعي دائري.

### حاول أن تحل

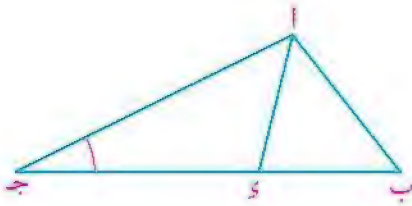
٨) في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس مفسرًا إجابتك.



### مثال

٩) ا ب ج مثلث، و  $\overline{ب ج}$  حيث  $(ا ج)^2 = ج ي \times ج ب$  أثبت أن:  $\triangle ا ج ي \sim \triangle ب ج ا$

الحل



- (١) المثلثان ا ب ج، و ا ج ي فيهما  $\angle$  مشتركة  
 $\therefore (ا ج)^2 = ج ي \times ج ب$   
 $\therefore \frac{ا ج}{ج ب} = \frac{ج ي}{ا ج}$   
 من (١)، (٢) ينتج أن  $\triangle ا ج ي \sim \triangle ب ج ا$  (نظرية)

### حاول أن تحل

٩) ا ب ج، و ه و مثلثان متشابهان، س منتصف  $\overline{ب ج}$ ، ص منتصف  $\overline{ه و}$  أثبت أن:  
 ا)  $\triangle ا ب س \sim \triangle ا ب ص$  ب)  $ا س \times ي ه = ا ب \times ص$

### تحقق من فهمك

في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س.

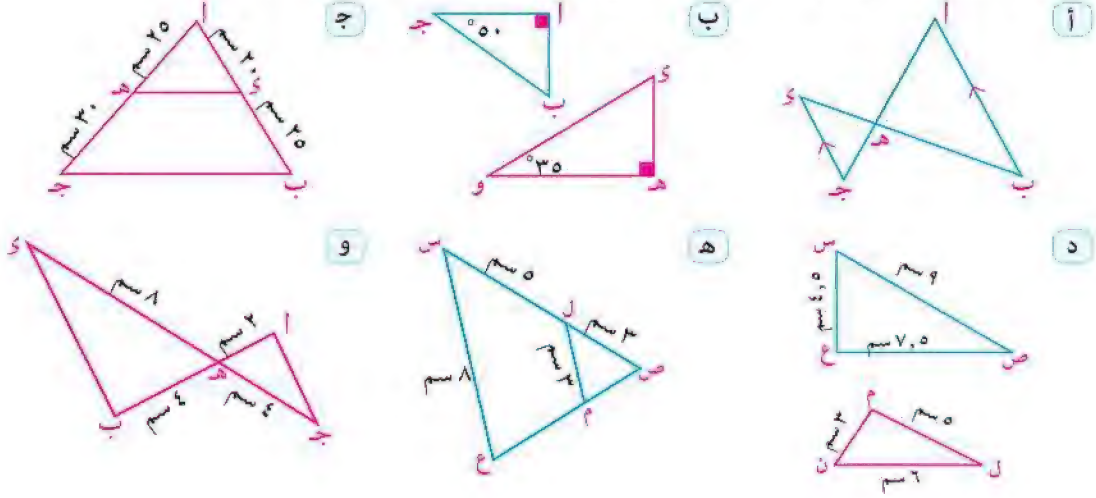




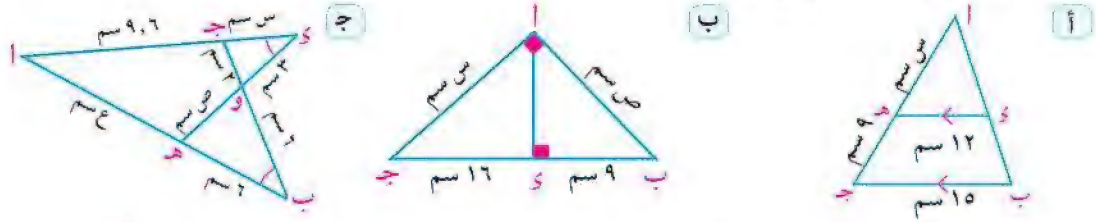
## تمارين ٢ - ٢



١ اذكر أى الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وفي حالة التشابه اذكر سبب التشابه.



٢ أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:



٣ فى الشكل المقابل:  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$  فى  $\triangle ABC$

أولاً: أكمل:  $\triangle ABC \sim \triangle \dots \sim \triangle \dots$

ثانياً: إذا كان س، ص، ع، ل، م، ن هى أطوال القطع المستقيمة بالستيمترات والمعينة بالشكل: فأكمل التناسبات التالية:

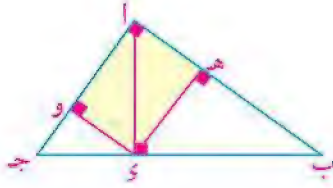
أ	$\frac{م}{ع} = \frac{س}{ص}$	ب	$\frac{ل}{ع} = \frac{س}{ص}$	ج	$\frac{م}{س} = \frac{ل}{ص}$	د	$\frac{ل}{ج} = \frac{ل}{ص}$
هـ	$\frac{س}{س} = \frac{س}{ص}$	و	$\frac{ل}{ص} = \frac{ل}{ص}$	ز	$\frac{ل}{س} = \frac{ل}{ص}$	ح	$\frac{ل}{ص} = \frac{ل}{ص}$

٤  $\overline{AB}$ ،  $\overline{CD}$  وتران فى دائرة،  $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \overline{E}$  حيث  $E$  خارج الدائرة،  $AB = 4$  سم،  $CD = 7$  سم،  $BE = 6$  سم. أثبت أن  $\triangle ABE \sim \triangle CDE$  ثم أوجد طول  $CE$ .

٥  $\overline{AB}$ ،  $\overline{CD}$  وتران فى دائرة،  $\overline{AB} \perp \overline{CD}$  فى  $\triangle ABC$ ،  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$  فى  $\triangle CDE$ . أثبت أن  $AB \times CD = CE \times BE$ .

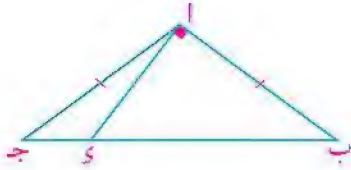
٦ فى المثلث  $ABC$ ،  $AD \perp BC$  حيث  $D$  على  $BC$ ،  $AD = 4$  سم،  $BD = 3$  سم،  $DC = 6$  سم. أثبت أن  $AB^2 = AD \times AC$ .

- ٧)  $\triangle ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$ ، رسم  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  ليقطعه في  $D$ . إذا كان  $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{3}$ ،  $AB = 6\sqrt{2}$  سم أوجد طول كل من  $\overline{BD}$ ،  $\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$ .



- ٨) في الشكل المقابل:  $\triangle ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$ ،  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ،  $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ ،  $\overline{DF} \perp \overline{AC}$  أثبت أن:

- أ)  $\triangle ADE \sim \triangle ADF$   
 ب) مساحة المستطيل  $ADEF = \sqrt{AB \times AC \times AD}$  و  $\sqrt{AB \times AC \times AD}$  و  $\sqrt{AB \times AC \times AD}$



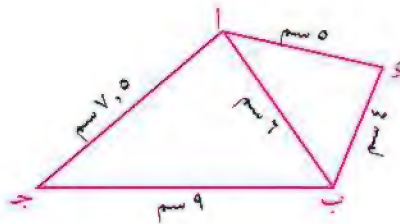
- ٩) في الشكل المقابل:  $\triangle ABC$  مثلث منفرج الزاوية في  $A$ ،  $AB = AC$ ، رسم  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  ويقطع  $\overline{BC}$  في  $D$ . أثبت أن:  $2(AB)^2 = BC^2 + 4AD^2$

- ١٠) تعبر المجموعتان  $A$ ،  $B$  عن أطوال أضلاع مثلثات مختلفة بالستيمترات.

اكتب أمام كل مثلث من المجموعة  $A$  رمز المثلث الذي يشابهه من المجموعة  $B$  مجموعة (أ) مجموعة (ب)

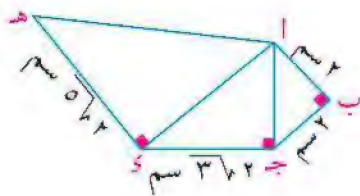
٥	٤	٢,٥	أ
١٤	١٣,٥	٨	ب
٥٥	٣٥	٢٥	ج
١١	١١	١١	د
٦	٤	٣,٥	هـ
١٠	٦	٨	و
٤٢	٥٤	٣٢	ز

٦	٦	٦	١
١١	٧	٥	٢
١٠	٨	٥	٣
١٢	٨	٧	٤
٢٨	٢٧	١٦	٥



- ١١) في الشكل المقابل:  $\triangle ABC$  مثلث فيه  $AB = 6$  سم،  $BC = 9$  سم،  $AC = 7,٥$  سم،  $D$  نقطة خارجة عن المثلث  $ABC$  حيث  $AD = 4$  سم،  $DC = 3$  سم، أثبت أن:

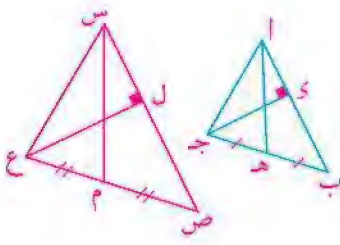
- أ)  $\triangle ABC \sim \triangle ACD$   
 ب)  $\overline{AD}$  ينصف  $\angle B$



- ١٢) من الشكل المقابل أكمل:

$\triangle ABC \sim \triangle \dots$   
 ومعامل التشابه =  $\dots$





١٣) في الشكل المقابل:  $\overline{AB} \sim \overline{SC}$ ،  $\overline{H}$  منتصف  $\overline{BC}$ ،

$\overline{M}$  منتصف  $\overline{SC}$ ،  $\overline{J} \perp \overline{AB}$ ،  $\overline{L} \perp \overline{SC}$ ، أثبت أن:

أ)  $\triangle AHC \sim \triangle SME$

ب)  $\frac{JH}{EL} = \frac{AH}{SM}$

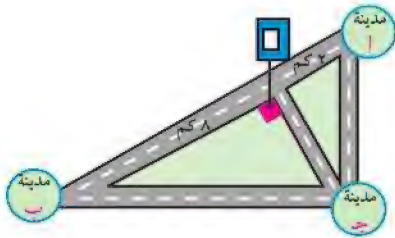
١٤)  $\overline{AB} \sim \overline{SC}$ ،  $\overline{H}$  منتصف  $\overline{BC}$ ،  $\overline{J} \perp \overline{AB}$ ،  $\overline{L} \perp \overline{SC}$ ،  $\overline{M}$  منتصف  $\overline{SC}$ ،

$\overline{H}$ ،  $\overline{L}$  منتصف  $\overline{BC}$ ،  $\overline{J} \perp \overline{AB}$ ،  $\overline{L} \perp \overline{SC}$ ،  $\overline{M}$  منتصف  $\overline{SC}$ ،

أثبت أن  $\triangle AHC \sim \triangle SME$

١٥)  $\overline{AB} \sim \overline{SC}$ ،  $\overline{H} \in \overline{BC}$  حيث  $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ،  $\overline{J} \perp \overline{AB}$ ،  $\overline{L} \perp \overline{SC}$ ،  $\overline{M}$  منتصف  $\overline{SC}$ ،

أ)  $\triangle AHC \sim \triangle SME$  ب)  $\overline{AH} \perp \overline{BC}$  ج)  $\overline{JH} = \overline{LM}$



١٦) يبين المخطط المقابل موقع محطة خدمة وتموين سيارات يراد

إقامتها على الطريق السريع عند تقاطع طريق جانبي يؤدي إلى

المدينة ج وعمودياً على الطريق السريع بين المدينتين أ، ب.

أ) كم ينبغي أن تبعد المحطة عن المدينة ج؟

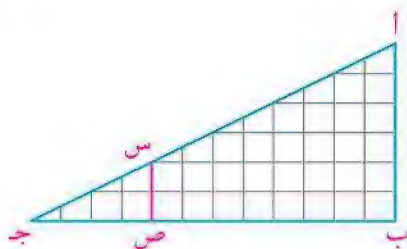
ب) ما البعد بين المدينتين ب، ج؟

نشاط

استخدام برنامج خرائط (Google Earth) لحساب أقصر بعد بين عواصم محافظات جمهورية مصر العربية

## سوف نتعلم

- العلاقة بين محيطي مثلعين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.
- العلاقة بين مساحتي سطحين متشابهين ومعامل (نسبة) التشابه.



على ورق مربعات رسم كل من المثلثين  
أ ب ج، س ص ج.

١- بين لماذا يكون:

$\Delta س ص ج \sim \Delta أ ب ج$ ؟ أوجد معامل التشابه عندئذ.

٢- احسب النسبة بين مساحة المثلث س ص ج إلى مساحة المثلث الأصلي أ ب ج

٣- عين نقطة أخرى مثل  $س \in \overline{أ ج}$ ، ثم ارسم  $\overline{س و} \parallel \overline{أ ب}$  ويقطع  $\overline{ب ج}$  في  $و$   
لتحصل على المثلث  $س و ج$ ، هل  $\Delta س و ج \sim \Delta س ص ج$ ؟

٤- أكمل الجدول التالي:

## المصطلحات الأساسية

- محيط Perimeter
- مساحة Area
- مساحة مضلع Area of a Polygon
- أضلاع متناظرة Corresponding Sides

المثلثات	معامل التشابه	مساحة المثلث الأول	مساحة المثلث الثاني	النسبة بين مساحة المثلث الأول إلى مساحة المثلث الثاني
$\Delta س ص ج \sim \Delta أ ب ج$	$\frac{1}{3}$	٤	٣٦	$\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$
$\Delta س و ج \sim \Delta أ ب ج$				
$\Delta س ص ج \sim \Delta س و ج$				

٥- ماذا تعني النسب التي حصلت عليها مقارنة بمعامل التشابه (نسبة التشابه)؟

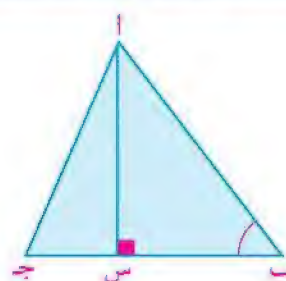
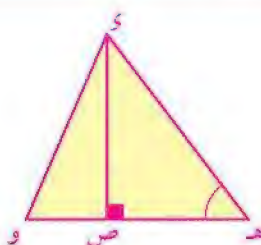
أولاً: النسبة بين مساحتي سطحين متشابهين متشابهين:

نظرية ٣

النسبة بين مساحتي سطحين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولَي أي ضلعين متناظرين فيهما.

## الأدوات والوسائل

- حاسب آلي
- جهاز عرض بيانات
- برامج رسومية
- ورق مربعات
- آلة حاسبة



المعطيات:  $\Delta أ ب ج \sim \Delta س و ج$

**لاحظ**  
الرمز  $\Delta$  يعبر عن مساحة  
سطح المضلع

$$\text{المطلوب: } \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)}$$

البرهان: ارسم  $\overline{أ س} \perp \overline{ب ج}$  حيث  $\overline{أ س} \cap \overline{ب ج} = \{س\}$ ،

$\overline{و ص} \perp \overline{و ه}$  حيث  $\overline{و ص} \cap \overline{و ه} = \{ص\}$

$\therefore \Delta أ ب ج \sim \Delta و ه و$

$$(1) \quad \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)}$$

في المثلثين  $أ ب س$ ،  $و ه ص$ :

$$\angle(أ ب س) = \angle(و ه ص) = 90^\circ, \quad \angle(أ ب س) = \angle(و ه ص)$$

(مسلمة التشابه)

$\therefore \Delta أ ب س \sim \Delta و ه ص$

$$(2) \quad \text{ويكون: } \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)}$$

$$\frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)}$$

بالتعويض من (1)، (2) ينتج أن:

$$\frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)}$$

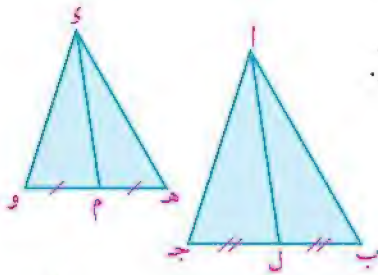
$$\text{لاحظ أن: } \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)}$$

$$\text{فيكون: } \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)}$$

أي أن النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين ارتفاعين متناظرين فيهما.

**تفكير ناقد:**

١- إذا كان  $\Delta أ ب ج \sim \Delta و ه و$ ،  $\overline{ل م}$  منتصف  $\overline{ب ج}$ ،  $\overline{م ه}$  منتصف  $\overline{و ه}$ .



$$\text{هل } \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \left(\frac{ل م}{م ه}\right)^2 ?$$

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.

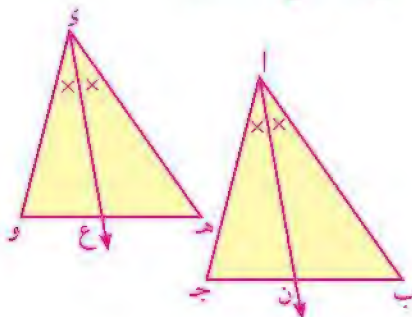
٢- إذا كان  $\Delta أ ب ج \sim \Delta و ه و$ ،

$\overline{أ ن}$  ينصف  $\Delta$  ويقطع  $\overline{ب ج}$  في  $ن$ ،

$\overline{و ع}$  ينصف  $\Delta$  ويقطع  $\overline{و ه}$  في  $ع$ .

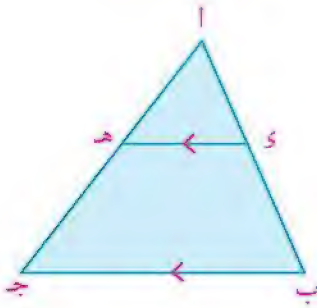
$$\text{هل } \frac{\Delta(أ ب ج)}{\Delta(و ه و)} = \left(\frac{أ ن}{و ع}\right)^2 ?$$

فسر إجابتك واكتب استنتاجك.





### مثال



١ في الشكل المقابل:  $AB \parallel DE$ ، و  $AB \supset DE$

حيث  $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{4}$ ، و  $DE \parallel BC$  ويقطع  $AC$  في  $H$ .  
إذا كانت مساحة  $\triangle ABC = 784$  سم<sup>2</sup>، أوجد:

أ) مساحة  $\triangle ADE$

ب) مساحة شبه المنحرف  $DECB$

الحل

في  $\triangle ADE$  و  $DE \parallel BC$ :

(نتيجة)  $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$

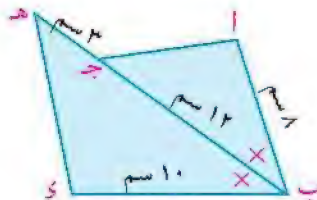
(نظرية)  $\therefore \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{\text{مساحة } (\triangle ADE)}{\text{مساحة } (\triangle ABC)}$

ويكون  $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{\text{مساحة } (\triangle ADE)}{784}$   $\therefore \text{مساحة } (\triangle ADE) = \frac{9}{16} \times 784 = 441$  سم<sup>2</sup>

$\therefore$  مساحة شبه المنحرف  $DECB = \text{مساحة } \triangle ABC - \text{مساحة } \triangle ADE$

$\therefore$  مساحة شبه المنحرف  $DECB = 784 - 441 = 343$  سم<sup>2</sup>

### حاول أن تحل



١ في الشكل المقابل:

$EF \parallel BC$  و  $E$  منتصف  $AB$

،  $\text{مساحة } (\triangle ABC) = 48$  سم<sup>2</sup>

أوجد:  $\text{مساحة } (\triangle EFC)$

### مثال

٢ النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين هي ٤ : ٩ فإذا كان محيط المثلث الأكبر ٩٠ سم أوجد محيط المثلث الأصغر.

الحل

بفرض أن  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  و

$\therefore \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \frac{\text{مساحة } (\triangle ABC)}{\text{مساحة } (\triangle DEF)}$  ويكون  $\frac{4}{9} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$

$\therefore \frac{2}{3} = \frac{AB}{DE} = \frac{\text{محيط } \triangle ABC}{\text{محيط } \triangle DEF}$

ويكون  $\frac{2}{3} = \frac{\text{محيط } (\triangle ABC)}{90}$   $\therefore$  محيط  $\triangle ABC = 60$  سم

### حاول أن تحل

٢) أ ب ج، و هـ و مثلثان متشابهان،  $\frac{مر(\Delta أ ب ج)}{مر(\Delta و هـ)} = \frac{٣}{٤}$

- أ) إذا كان محيط المثلث الأصغر ٣٦٤٥ سم. أوجد محيط المثلث الأكبر.  
ب) إذا كان هـ و = ٢٨ سم أوجد طول ب ج.

### مثال

- ٣) إذا كان كل ١ سم على الخريطة يمثل ١٠ كيلومترًا.  
أوجد المساحة الحقيقية التي يمثلها المثلث أ ب ج لأقرب  
كيلو متر مربع إذا كان  $مر(\Delta أ ب ج) = ٦,٤$  سم<sup>٢</sup>

### الحل

$$\text{مقياس الرسم} = \text{معامل التشابه} = \frac{١}{١٠ \times ١٠}$$

$$\frac{\text{مساحة } \Delta أ ب ج}{\text{المساحة الحقيقية}} = \text{مربع معامل التشابه}$$

$$\left(\frac{١}{١٠ \times ١٠}\right)^2 = \frac{٦,٤}{\text{المساحة الحقيقية}}$$

$$\text{المساحة الحقيقية} = ٦,٤ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ \text{ سم}^2$$

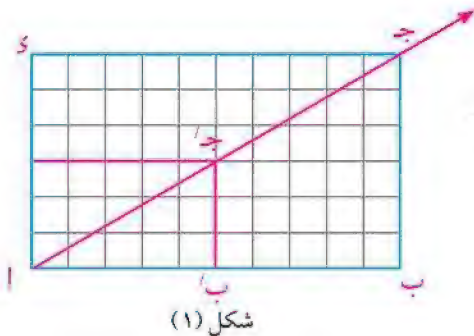
$$\approx ٦٤٠ \text{ كم}^2$$

### حاول أن تحل

- ٢) أ) في الخريطة المبينة أعلاه احسب مساحة المثلث و هـ و بالستيمترات المربعة واستخدامها في تقدير المساحة الحقيقية التي يمثلها لأقرب كيلو مربع.  
ب) باستخدام إحدى خرائط جمهورية مصر العربية احسب مساحة شبه جزيرة سيناء لأقرب مائة كيلو متر مربع - قارن إجابتك مع زملائك.

ثانيًا النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين The ratio between the area of two similar polygons

### عمل تعاوني



اعمل مع زميل لك لبحث إمكانية تقسيم المضلعين المتشابهين إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

١- ارسم مضلعات متشابهة كما في شكل (١)، شكل (٢).

٢- في شكل (١) ارسم آ ج. ماذا تلاحظ؟

٣- في شكل (٢) إرسم  $\overleftrightarrow{آو}$ . ماذا تلاحظ؟ هل تجد تفسيراً لذلك؟

**لاحظ أن**

في المثلثين  $\triangle أ ب ج$ ،  $\triangle أ ب ج'$ ،

$\angle أ = \angle أ'$ ،  $\angle ب = \angle ب'$ ،

فيكون  $\overline{ب ج'} \parallel \overline{ب ج}$

$\therefore \triangle أ ب ج \sim \triangle أ ب ج'$

وبالمثل  $\angle و = \angle و'$ ،  $\angle ه = \angle ه'$

$\therefore \overline{ه و'} \parallel \overline{ه و}$  ويكون  $\triangle أ ه و \sim \triangle أ ه و'$  وهكذا.

**حقيقة:** المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسموا إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

**ملاحظة:** الحقيقة السابقة صحيحة مهما كان عدد الأضلاع

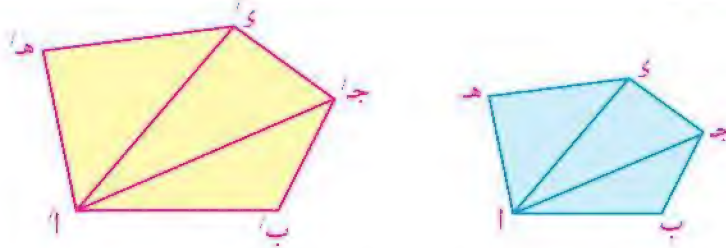
في المضلعين المتشابهين، (المضلعان المتشابهان لهما نفس

العدد من الأضلاع) فإذا كان عدد أضلاع المضلع =  $n$  ضلعاً

فإن عدد المثلثات التي يمكن أن ينقسم إليها المضلع (عن طريق أقطاره المشتركة في نفس الرأس) =  $n - 2$  مثلثاً.

النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولى أى ضلعين متناظرين فيهما.

**نظرية**  
٤



المعطيات: المضلع  $\triangle أ ب ج د ه و ز$   $\sim$  المضلع  $\triangle أ ب ج د ه و ز'$

المطلوب:  $\frac{\text{مساحة المضلع } \triangle أ ب ج د ه و ز}{\text{مساحة المضلع } \triangle أ ب ج د ه و ز'}} = \left(\frac{أ ب}{أ ب'}\right)^2$

البرهان: من أ، نرسم  $\overline{آ ج}$ ،  $\overline{آ و}$ ،  $\overline{آ د}$ ،  $\overline{آ ه}$

$\therefore$  المضلع  $\triangle أ ب ج د ه و ز \sim \triangle أ ب ج د ه و ز'$

$\therefore$  فهما ينقسمان إلى نفس العدد من المثلثات، كل يشابه نظيره (حقيقة). ويكون:

$$\frac{\text{مساحة } (\triangle أ ب ج)}{\text{مساحة } (\triangle أ ب ج')} = \left(\frac{أ ب}{أ ب'}\right)^2, \quad \frac{\text{مساحة } (\triangle أ ج د)}{\text{مساحة } (\triangle أ ج د')} = \left(\frac{أ ج}{أ ج'}\right)^2, \quad \frac{\text{مساحة } (\triangle أ د ه و ز)}{\text{مساحة } (\triangle أ د ه و ز')} = \left(\frac{أ د}{أ د'}\right)^2$$

(من تشابه المضلعين)

$$\therefore \frac{أ ب}{أ ب'} = \frac{أ ج}{أ ج'} = \frac{أ د}{أ د'} = \frac{أ ه}{أ ه'} = \frac{أ و}{أ و'}$$



$$\therefore \left(\frac{أ ب}{أ' ب'}\right)^2 = \frac{مر(أ ب ج)}{مر(أ' ب' ج')} = \frac{مر(أ ج د)}{مر(أ' ج' د')} = \frac{مر(أ د هـ)}{مر(أ' د' هـ)}$$

ومن خواص التناسب

$$\left(\frac{أ ب}{أ' ب'}\right)^2 = \frac{مر(أ ب ج) + مر(أ ج د) + مر(أ د هـ)}{مر(أ' ب' ج') + مر(أ' ج' د') + مر(أ' د' هـ)}$$

$$\text{ويكون: } \left(\frac{أ ب}{أ' ب'}\right)^2 = \frac{مر(المضلع أ ب ج د هـ)}{مر(المضلع أ' ب' ج' د' هـ)} \text{ وهو المطلوب}$$

حاول أن تحل

٤ أ إذا كان المضلع أ ب ج د هـ ~ المضلع أ' ب' ج' د' هـ،  $\frac{أ ب}{أ' ب'} = \frac{١}{٣}$  فاكتب ما يساويه كلٌّ من:

$$\frac{مر(المضلع أ ب ج د هـ)}{مر(المضلع أ' ب' ج' د' هـ)}, \frac{\text{محيط المضلع أ ب ج د هـ}}{\text{محيط المضلع أ' ب' ج' د' هـ}}$$

ب إذا كان المضلعان أ ب ج د هـ، أ' ب' ج' د' هـ متشابهان والنسبة بين مساحتي سطحيهما ٤ : ٢٥

$$\text{فاكتب ما يساويه كل من: } \frac{أ ب}{أ' ب'}, \frac{\text{محيط المضلع أ ب ج د هـ}}{\text{محيط المضلع أ' ب' ج' د' هـ}}$$

ج إذا كانت النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ١ : ٤، مساحة المضلع الأول ٢٥ سم<sup>٢</sup>. أوجد مساحة المضلع الثاني.

د إذا كان طولاً ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين هما ١٢ سم، ١٦ سم، وكانت مساحة المضلع الأصغر = ١٣٥ سم<sup>٢</sup>. فأوجد مساحة المضلع الأكبر.

مثال

٤ أ ب ج د هـ، س ص ع ل مضلعان متشابهان فيهما:  $\angle(أ) = \angle(س) = ٤٠^\circ$ ،  $س ص = \frac{٣}{٤} أ ب$ ، ج د = ١٦ سم. احسب: أولاً:  $\angle(س)$  ثانياً: طول ع ل ثالثاً: مر(المضلع أ ب ج د هـ) : مر(المضلع س ص ع ل)

الحل

∴ المضلع أ ب ج د هـ ~ المضلع س ص ع ل

$$\therefore \angle(أ) = \angle(س) \text{ فيكون } \angle(س) = ٤٠^\circ \text{ (المطلوب أولاً)}$$

$$\therefore س ص = \frac{٣}{٤} أ ب \quad \therefore \frac{س ص}{أ ب} = \frac{٣}{٤} \text{ (من خواص التناسب)}$$

من تشابه المضلعين نجد أيضاً  $\frac{أ ب}{س ص} = \frac{ج د}{ع ل}$

$$\therefore \frac{١٦}{ع ل} = \frac{٣}{٤} \text{ فيكون } ع ل = \frac{١٦ \times ٤}{٣} = ٢١ \frac{١}{٣} \text{ سم}$$

$$\text{مر(المضلع أ ب ج د هـ) : مر(المضلع س ص ع ل) = } (أ ب)^2 : (س ص)^2$$

$$= ١٦^2 : ٩^2$$

$$٩ : ١٦ \text{ (المطلوب ثالثاً)}$$

لاحظ أن

$$أ ب = ٤ ك$$

$$س ص = ٣ ك$$

$$ك \neq ٠$$

### مثال

٥ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين ٣ : ٤ . إذا كان مجموع مساحتي سطحيهما ٢٢٥ سم<sup>٢</sup> فأوجد مساحة كل منهما.

### الحل

∴ النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين = ٣ : ٤  
 ∴ النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما = ٣ : ٤  
 بفرض أن مساحة المضلع الأول = ٩ سم<sup>٢</sup> ، مساحة المضلع الثاني = ١٦ سم<sup>٢</sup>  
 ∴ ٩ سم + ١٦ سم = ٢٥ سم ويكون  $\frac{225}{16+9} = 9$   
 ∴ مساحة المضلع الأول =  $9 \times 9 = 81$  سم<sup>٢</sup>  
 ∴ مساحة المضلع الثاني =  $9 \times 16 = 144$  سم<sup>٢</sup>

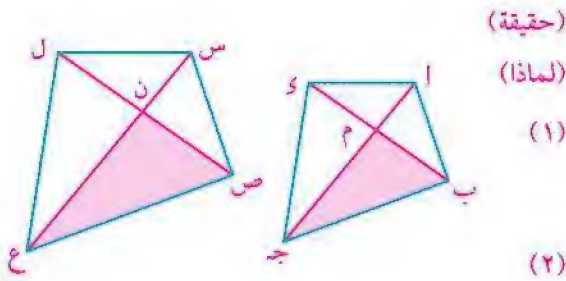
### حاول أن تحل

٥ الربط مع الزراعة: مزرعتان على شكل مضلعين متشابهين، النسبة بين طولي ضلعين متناظرين فيهما ٣ : ٥ ، إذا كان الفرق بين مساحتيهما ٣٢ فدأنا، فأوجد مساحة كل منهما.

### مثال

٦ أ ب ج د ، س ص ع ل مضلعان متشابهان. تقاطع قطري الأول في م وتقاطع قطري الثاني في ن. أثبت أن م (المضلع أ ب ج د) : م (المضلع س ص ع ل) = (م ج) : (ن ع)

### الحل



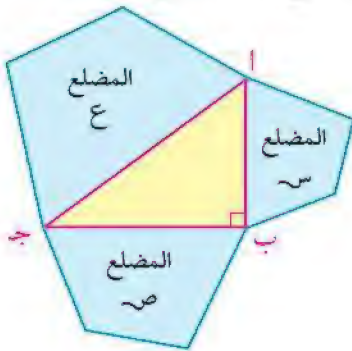
∴ المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل  
 ∴  $\Delta$  أ ب ج ~  $\Delta$  س ص ع  
 ،  $\Delta$  د ب ج ~  $\Delta$  ل ص ع  
 ∴  $\Delta$  م ب ج ~  $\Delta$  م ن ع  
 ويكون  $\frac{BM}{EN} = \frac{BJ}{EC}$   
 ∴ المضلع أ ب ج د ~ المضلع س ص ع ل  
 ∴  $\frac{M(ABCD)}{M(SEVL)} = \frac{M(ABCD)}{M(SEVL)}$   
 من (١)، (٢) نستنتج أن:  
 م (المضلع أ ب ج د) : م (المضلع س ص ع ل) = (م ج) : (ن ع)

### حاول أن تحل

- ٦) أ ب ج د، س ص ع ل مضلعان متشابهان فإذا كانت م منتصف ب ج، ن منتصف ص ع فأثبت أن:  
مر(المضلع أ ب ج د) : مر(المضلع س ص ع ل) = (م د) : (ن ل)

### مثال

- ٧) أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في ب، فإذا كانت أ ب، ب ج، آ ج أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة منشأة على أضلاع المثلث أ ب ج وهي على الترتيب: المضلع س، المضلع ص، المضلع ع.  
فأثبت أن مر(المضلع س) + مر(المضلع ص) = مر(المضلع ع)



### الحل

$$\therefore \text{المضلع س} \sim \text{المضلع ع} \therefore \frac{\text{مر(المضلع س)}}{\text{مر(المضلع ع)}} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

$$\therefore \text{المضلع ص} \sim \text{المضلع ع} \therefore \frac{\text{مر(المضلع ص)}}{\text{مر(المضلع ع)}} = \frac{BC^2}{AC^2}$$

$$\therefore \frac{\text{مر(المضلع س)}}{\text{مر(المضلع ع)}} + \frac{\text{مر(المضلع ص)}}{\text{مر(المضلع ع)}} = \frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2}$$

$$(1) \quad \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} =$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ \therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

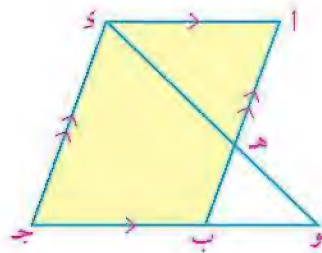
$$\text{من (1)، (2) ينتج أن } 1 = \frac{\text{مر(المضلع س)}}{\text{مر(المضلع ع)}} + \frac{\text{مر(المضلع ص)}}{\text{مر(المضلع ع)}}$$

$$\text{ويكون مر(المضلع س) + مر(المضلع ص) = مر(المضلع ع)}$$

### حاول أن تحل

- ٧) أ ب ج د مثلث قائم الزاوية في أ، فيه أ ب = ٥ سم، ب ج = ١٣ سم، حيث أ ب، ب ج، آ ج أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة ل، م، ن منشأة على أضلاع المثلث أ ب ج من الخارج على الترتيب.  
فإذا كانت مساحة سطح المضلع ل تساوي ١٠٠ سم<sup>٢</sup> أوجد مساحة سطح كل من المضلعين م، ن.

### تحقق من فهمك



في الشكل المقابل: أ ب ج د متوازي أضلاع،

$$\text{هـ} \in \overline{AB} \text{ حيث } \frac{AH}{HB} = \frac{2}{3}, \text{ و } \overline{HD} \cap \overline{CB} = \text{و}$$

- ١) أثبت أن  $\triangle ADE \sim \triangle BDF$

$$2) \text{ أوجد } \frac{\text{مر}(\triangle ADE)}{\text{مر}(\triangle BDF)}$$





## تمارين ٢ - ٣



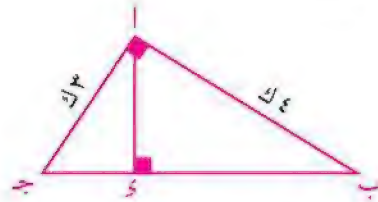
١ أكمل:

أ إذا كان  $\Delta$  ا ب ج  $\sim \Delta$  س ص ع، وكان ا ب = ٣ س ص فإن  $\frac{\text{مس}(\Delta \text{ س ص ع})}{\text{مس}(\Delta \text{ ا ب ج})} = \dots$

ب إذا كان  $\Delta$  ا ب ج  $\sim \Delta$  ي ه و، مس  $(\Delta \text{ ا ب ج}) = ٩$  مس  $(\Delta \text{ ي ه و})$  وكان ي ه = ٤ سم فإن:  
ا ب = ..... سم

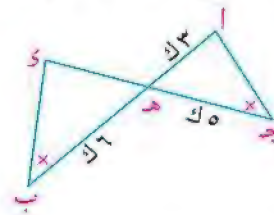
٢ ادرس كلًا من الأشكال التالية، حيث ك ثابت تناسب، ثم أكمل:

ب



و  $(\Delta \text{ ا ب ج}) = ٩٠^\circ$ ، ا ي  $\perp$  ب ج  
مس  $(\Delta \text{ ا ي ج}) = ١٨٠$  سم<sup>٢</sup> فإن:  
مس  $(\Delta \text{ ا ب ج}) = \dots$  سم<sup>٢</sup>

ا



ا ب  $\cap$  ج د = {هـ}  
مس  $(\Delta \text{ ا ج هـ}) = ٩٠٠$  سم<sup>٢</sup>  
فإن: مس  $(\Delta \text{ ي ه ب}) = \dots$  سم<sup>٢</sup>

٣ ا ب ج مثلث، و  $\exists$  ا ب حيث ا ي = ٢ ب ي، هـ  $\exists$  ا ج حيث و هـ  $\parallel$  ب ج.  
إذا كانت مساحة  $\Delta$  ا ي هـ = ٦٠ سم<sup>٢</sup>. أوجد مساحة شبه المنحرف و ب ج هـ.

٤ ا ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، رسمت المثلثات المتساوية الأضلاع ا ب س، ب ج ص، ا ج ع.  
أثبت أن: مس  $(\Delta \text{ ا ب س}) + \text{مس}(\Delta \text{ ب ج ص}) = \text{مس}(\Delta \text{ ا ج ع})$ .

٥ ا ب ج مثلث فيه  $\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}} = \frac{٤}{٣}$ ، رسمت الدائرة المارة برؤوسه. من نقطة ب رسم المماس لهذه الدائرة فقطع

ا ج في هـ. أثبت أن:  $\frac{\text{مس}(\Delta \text{ ا ب ج})}{\text{مس}(\Delta \text{ ا ب هـ})} = \frac{٧}{١٦}$

٦ ا ب ج و متوازي أضلاع س  $\exists$  ا ب، س  $\nexists$  ا ب حيث ب س = ٢ ا ب، ص  $\exists$  ج ب، ص  $\nexists$  ج ب

حيث ب ص = ٢ ب ج، رسم متوازي الأضلاع ب س ع ص أثبت أن:  $\frac{\text{مس}(\Delta \text{ ا ب ج})}{\text{مس}(\Delta \text{ ب س ع})} = \frac{١}{٤}$

٧)  $\triangle ABC$  قائم الزاوية في  $B$ ،  $\overline{AD} \perp \overline{AC}$  يقطع في  $D$ ، رُسم على  $\overline{AB}$ ،  $\overline{BC}$  المربعان  $AS$  و  $BT$ ،  $B$  م  $N$  ج خارج المثلث  $ABC$ .

أ) أثبت أن المثلث  $ASB \sim$  المثلث  $BTN$  ج.

ب) إذا كان  $AB = 6$  سم،  $AC = 10$  سم. أوجد النسبة بين مساحتي المثلثين.

٨)  $\triangle ABC$  مثلث،  $\overline{AD}$ ،  $\overline{BE}$ ،  $\overline{CF}$  أضلاع متناظرة لثلاثة مضلعات متشابهة مرسومة خارج المثلث، وهي المضلعات بين  $S$ ،  $V$ ،  $E$  على الترتيب.

فإذا كانت مساحة المثلث  $S = 40$  سم<sup>٢</sup>، ومساحة المثلث  $V = 85$  سم<sup>٢</sup>، ومساحة المثلث  $E = 125$  سم<sup>٢</sup>.  
أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية.

٩)  $\triangle ABC$  مربع قسمت  $\overline{AB}$ ،  $\overline{BC}$ ،  $\overline{CA}$  بالنقاط  $S$ ،  $V$ ،  $E$ ، ل على الترتيب بنسبة  $1:3$ .  
أثبت أن:

أ) الشكل  $SVE$  ل مربع  
ب)  $\frac{S}{8} = \frac{\text{مساحة المثلث } SVE}{\text{مساحة المثلث } ABC}$

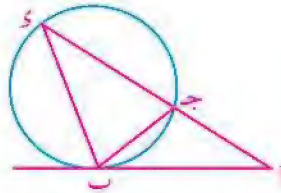
١٠) صالة ألعاب مستطيلة الشكل أبعادها ٨ متر، ١٢ متر، تم تغطية أرضيتها بالخشب، فكلفت ٣٢٠٠ جنيه.  
احسب (باستخدام التشابه) تكاليف تغطية أرضية صالة مستطيلة أكبر بنفس نوع الخشب وبنفس الأسعار، إذا كان أبعادها ١٤، ٢١ من الأمتار.

## سوف نتعلم

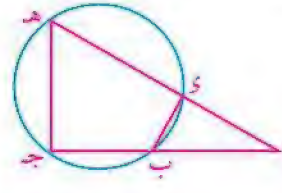
- العلاقة بين وترين متقاطعين في دائرة.
- العلاقة بين قاطعين لدائرة من نقطة خارجها.
- العلاقة بين طول مماس وطولى جزأى قاطع لدائرة مرسومين من نقطة خارجها.
- نمذجة وحل مشكلات وتطبيقات حياتية باستخدام تشابه المضلعات في الدائرة.



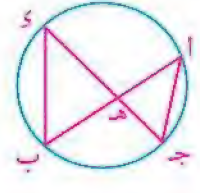
فى كل من الأشكال الآتية مثلثان متشابهان. اكتب المثلثين بترتيب تطابق زواياهما واستنتج تناسب الأضلاع المتناظرة.



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

◀ فى شكل (١): هل توجد علاقة بين  $هـ أ \times هـ ب$  ،  $هـ ج \times هـ د$  ؟

◀ فى شكل (٢): هل توجد علاقة بين  $هـ أ \times هـ ب$  ،  $هـ ج \times هـ د$  ؟

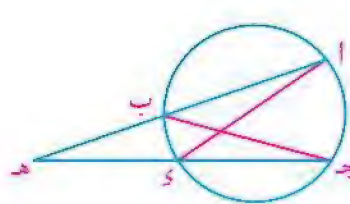
◀ فى شكل (٣): هل توجد علاقة بين  $هـ أ \times هـ ب$  ،  $هـ ج \times هـ د$  ؟

## المصطلحات الأساسية

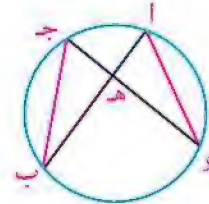
- وتر Chord
- قاطع Secant
- مماس Tangent
- قطر Diameter
- مماس خارجى مشترك Common External Tangent
- مماس داخلى مشترك Common Internal Tangent
- دوائر متحدة المركز Concentric Circles

## تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويزان للوترين  $أ ب$  ،  $ج د$  لدائرة فى نقطة  $هـ$  فإن:  
 $هـ أ \times هـ ب = هـ ج \times هـ د$



شكل (٢)



شكل (١)

## لاستنتاج ذلك:

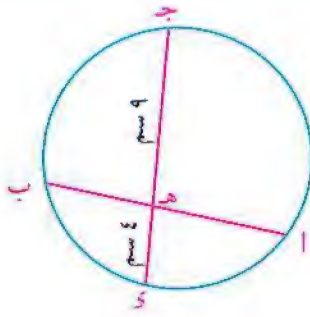
◀ ارسم  $أ د$  ،  $ب ج$

◀ فى كل من الشكلين أثبت أن المثلثين  $هـ أ د$  ،  $هـ ج ب$  متشابهان فيكون:

$$\therefore هـ أ \times هـ ب = هـ ج \times هـ د \quad \frac{هـ أ}{هـ ج} = \frac{هـ ب}{هـ د}$$



### مثال



١ في الشكل المقابل:  $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$

وإذا كان  $\frac{AE}{EB} = \frac{4}{3}$ ،  $AD = 5$ ،  $CE = 9$ ،  $ED = 4$  سم  
أوجد طول  $\overline{AB}$

### الحل

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{4}{3} \quad \therefore EA = 4 \text{ كـ} \quad EB = 3 \text{ كـ} \quad \text{حيث ك} \neq 0$$

(تمرين مشهور)

$$\therefore \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\} \quad \therefore EA \times EB = ED \times EC$$

$$\text{فيكون: } 4 \times 3 = EC \times 9$$

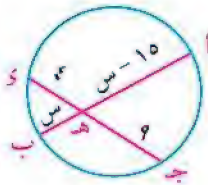
$$12 \text{ ك} = 36$$

$$3 \text{ ك} = 3$$

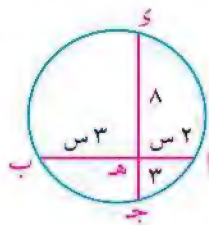
$$3 \sqrt{3} = EB \quad \text{ك} = 3 \sqrt{3}$$

### حاول أن تحل

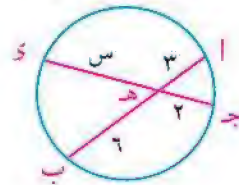
١ أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية (الأنطوال مقدرة بالسنتيمترات)



ج

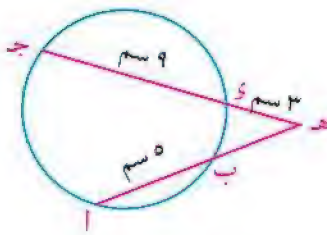


ب



أ

### مثال



٢ في الشكل المقابل:  $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\}$ ،  $AB = 5$  سم،

$CD = 9$  سم،  $ED = 3$  سم. أوجد طول  $\overline{BE}$

### الحل

بفرض أن  $BE = x$  سم.

$$\therefore \overline{AB} \cap \overline{CD} = \{E\} \quad \therefore EA \times EB = ED \times EC$$

$$\text{فيكون: } (5 + x) \times 3 = (9 + 3) \times 2$$

$$3(5 + x) = 24$$

$$(5 + x) = 8$$

$$5 + x = 8 \quad \therefore x = 3 \text{ سم}$$

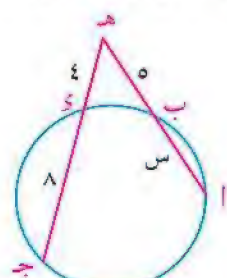
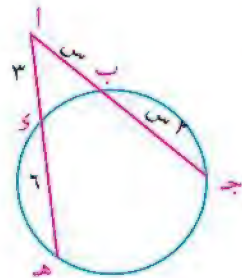
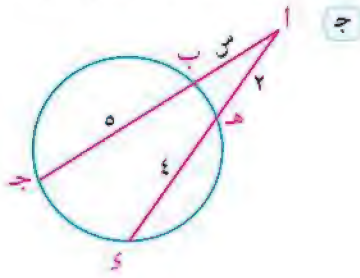
$$\therefore \text{طول } \overline{BE} = 3 \text{ سم}$$

(تمرين مشهور)

**حاول أن تحل**

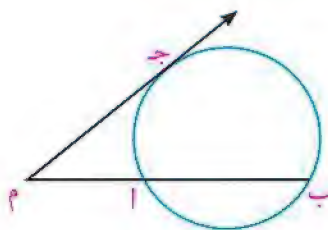
٢) أوجد قيمة س في كل من الأشكال الآتية

(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



إذا كانت  $m$  نقطة خارج دائرة،  $\overrightarrow{m_j}$  يمس الدائرة في  $j$ ،  $\overrightarrow{m_b}$  يقطعها في  $a$ ،  $b$  فإن  $(m_j)^2 = m_a \times m_b$ .

في الشكل المقابل:  $\overrightarrow{م ج}$  مماس للدائرة  
 $\overrightarrow{م ب}$  يقطع الدائرة في أ، ب  
 $\therefore (م ج)^2 = م أ \times م ب$



### مثال

٣) في الشكل المقابل: هذا مماس للدائرة،

هـ جـ يقطع الدائرة في د، جـ على الترتيب.

حيث  $h_1 = 4$  سم،  $h_2 = 5$  سم، أوجد طول  $h_3$

### الحل

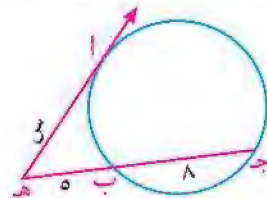
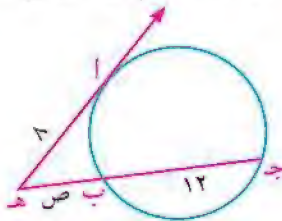
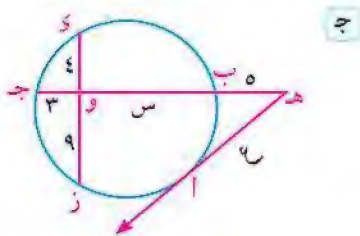
∴ هـ أ مماس، هـ ج قاطع للدائرة

∴ (هـ أ) = هـ<sup>٢</sup> × هـ ج (نتيجة)

$$37 = (0 + 4)4 = 4^2 \quad (\text{هـ})$$
$$7 = 1 \text{ هـ} \therefore$$

**حاول أن تحل**

٣ في كل من الأشكال التالية هـ مماس للدائرة. أوجد قيم س، ص، ع العديدة (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



## عكس تمرين مشهور

إذا تقاطع المستقيمان الحاويان للقطعتين  $AB$ ،  $جـ ز$  في نقطة  $هـ$  (مختلفة عن  $A$ ،  $B$ ،  $جـ$ ،  $ز$ ) وكان  $هـ أ \times هـ ب = هـ ج \times هـ ز$  فإن: النقط  $A$ ،  $B$ ،  $جـ$ ،  $ز$  تقع على دائرة واحدة.

### لاحظ أن:

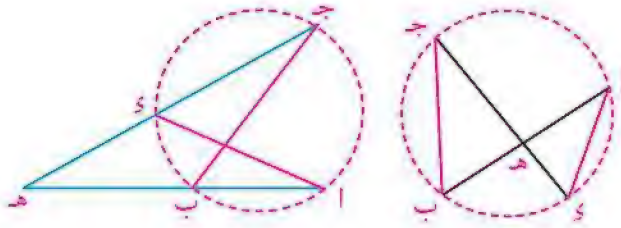
$$هـ أ \times هـ ب = هـ ج \times هـ ز$$

$$\text{فيكون } \frac{هـ أ}{هـ ب} = \frac{هـ ج}{هـ ز}$$

هل  $\triangle هـ أ ز \sim \triangle هـ ب ج$ ؟ لماذا؟

هل  $\angle (A) = \angle (B)$ ؟ لماذا؟

هل النقط  $A$ ،  $B$ ،  $جـ$ ،  $ز$  تقع على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.



### مثال

٤)  $AB$  جـ مثلث فيه  $AB = 15$  سم،  $أ جـ = 12$  سم،  $ز$   $\exists$   $AB$  حيث  $أ ز = 4$  سم،  $هـ$   $\exists$   $أ جـ$  حيث  $أ جـ = 5$  سم. أثبت أن الشكل  $ز ب جـ هـ$  رباعي دائري.

### الحل

$$\therefore أ ز \times AB = 4 \times 15 = 60$$

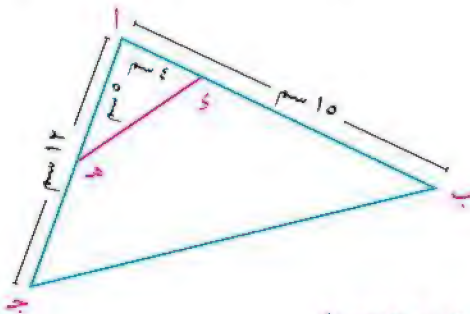
$$أ هـ \times أ جـ = 5 \times 12 = 60$$

$$\therefore أ ز \times AB = أ هـ \times أ جـ$$

$$\therefore ب ز \cap جـ هـ = \{A\}, أ ز \times AB = أ هـ \times أ جـ$$

$\therefore$  النقط  $ز$ ،  $B$ ،  $جـ$ ،  $هـ$  تقع على دائرة واحدة

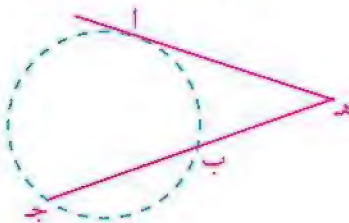
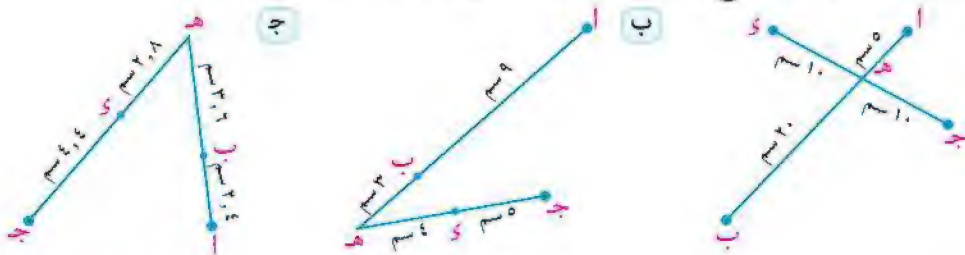
ويكون الشكل  $ز ب جـ هـ$  رباعياً دائرياً



(عكس تمرين مشهور)

### حاول أن تحل

٤) في أيٍّ من الأشكال التالية تقع النقط  $A$ ،  $B$ ،  $جـ$ ،  $ز$  على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.



### نتيجة

$$\text{إذا كان } (هـ أ)^2 = هـ ب \times هـ جـ$$

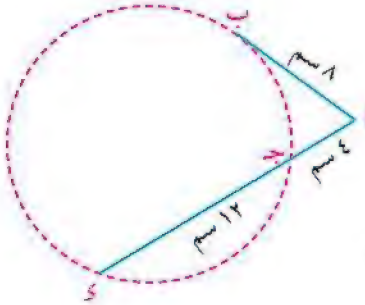
فإن  $هـ أ$  تماس الدائرة المارة بالنقط  $A$ ،  $B$ ،  $جـ$



### مثال

- ٥)  $AB$  جـ مثلث فيه  $AB = 8$  سم،  $AC = 4$  سم،  $BC = 12$  سم.  $AB$  تمس الدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$  حيث  $AD = 12$  سم. أثبت أن  $AB$  تمس الدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$ .

الحل



$$\therefore \angle A \times \angle E = \angle C \times \angle D = 120 \times 4 = 480$$

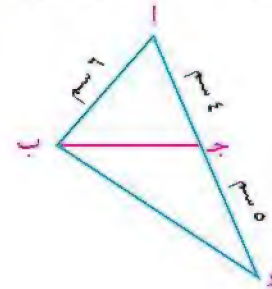
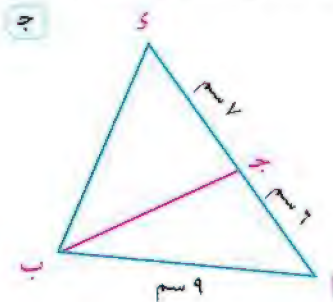
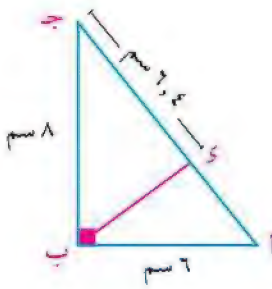
$$\therefore \angle A = \angle E = 120^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle E = 120^\circ$$

$\therefore AB$  تمس الدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$  عند النقطة  $B$ .

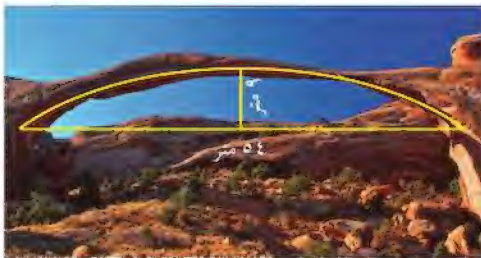
### حاول أن تحل

- ٥) في أيٍّ من الأشكال الآتية يكون  $AB$  مماسًا للدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $C$ ،  $D$ ،  $E$ ؟

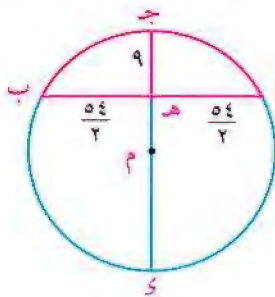


### مثال

- ٦) **تطبيقات حياتية: الربط مع الجيولوجيا:** في إحدى المناطق الساحلية توجد طبقة أرضية على شكل قوس طبيعي. وجد الجيولوجيون أنه قوس دائرة كما في الشكل المقابل. أوجد طول نصف قطر دائرة القوس.



الحل



بفرض أن طول نصف قطر دائرة القوس =  $R$  مترًا

$\therefore AB$ ،  $BC$  وتران متقاطعان في  $H$

$$\therefore HA \times HB = HC \times HD$$

$$27 \times 27 = 9 \times (R - 9)$$

$$729 = 9R - 81$$

$$810 = 9R$$

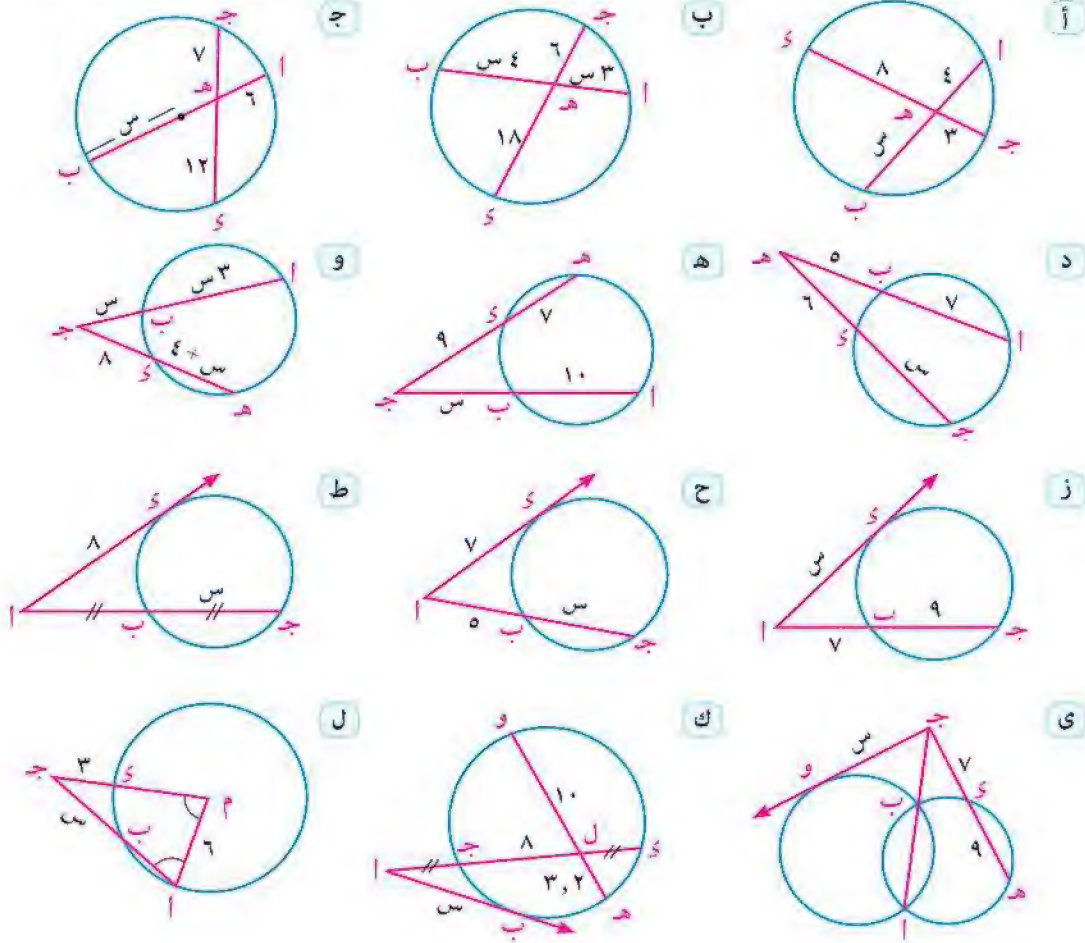
أي أن طول نصف قطر دائرة القوس يساوي ٩٠ مترًا.



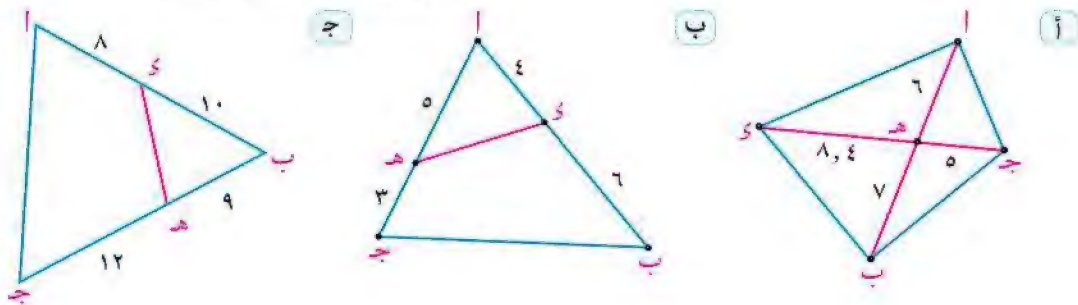
## تمارين ٢ - ٤



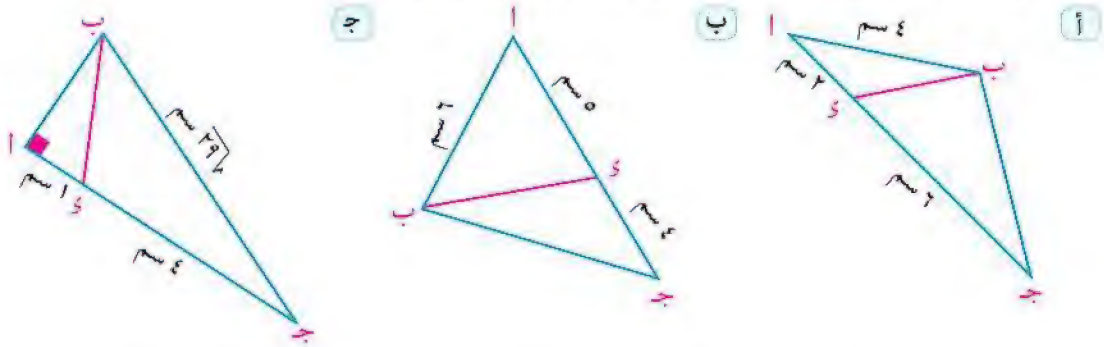
١ باستخدام الآلة الحاسبة أو الحساب العقلي، أوجد قيمة  $s$  العددية في كل من الأشكال التالية.  
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



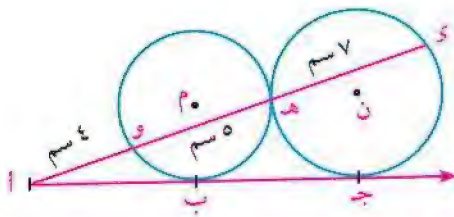
٢ في أي من الأشكال التالية تقع النقط أ، ب، ج، د على دائرة واحدة؟ فسر إجابتك.  
(الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



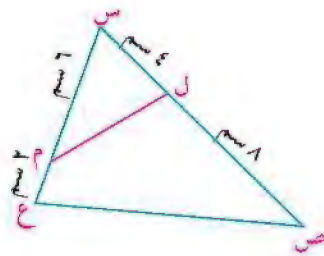
٣ في أي من الأشكال التالية  $\overline{AB}$  مماس للدائرة المارة بالنقط  $B$ ،  $J$ ،  $I$ .



٤ دائرتان متقاطعتان في  $A$ ،  $B$ ،  $J \in \overline{AB}$ ،  $J$  رُسم من  $J$  القطعتان  $J\Gamma$ ،  $J\Delta$  مماستان للدائرتين عند  $S$ ،  $V$ . أثبت أن  $J\Gamma = J\Delta$ .



٥ في الشكل المقابل: الدائرتان  $M$ ،  $N$  متماستان عنده  $A$   $J$  يمس الدائرة  $M$  عند  $B$ ، ويمس الدائرة  $N$  عند  $C$ ،  $AH$  يقطع الدائرتين عند  $D$ ،  $E$  على الترتيب حيث  $AO = 4$  سم،  $OH = 5$  سم،  $HD = 7$  سم. أثبت أن  $B$  منتصف  $\overline{AC}$ .



٦ في الشكل المقابل:  $L \in \overline{SV}$  حيث  $SL = 4$  سم،  $VL = 8$  سم،  $M \in \overline{SV}$  حيث  $SM = 6$  سم،  $EV = 2$  سم. أثبت أن:

أ  $\triangle SLM \sim \triangle SCE$

ب الشكل  $L$   $SV$   $E$  م رباعي دائري.

٧  $\overline{AB} \cap \overline{CD} = H$ ،  $AH = \frac{9}{13}$   $BH$ ،  $H = \frac{2}{3}$   $HD$ ،  $J$ ،  $K$   $BH = 6$  سم،  $JH = 5$  سم. أثبت أن النقط  $A$ ،  $B$ ،  $J$ ،  $K$  تقع على دائرة واحدة.

٨  $AB$   $J$  مثلث،  $J \in \overline{BC}$  حيث  $JB = 5$  سم،  $JC = 4$  سم. إذا كان  $AD = 6$  سم. أثبت أن:

أ  $J$  مماسة للدائرة التي تمر بالنقط  $A$ ،  $B$ ،  $J$ .

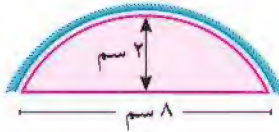
ب  $\triangle ADJ \sim \triangle BJA$

ج  $m(\angle ABJ) : m(\angle BJA) = 9 : 5$

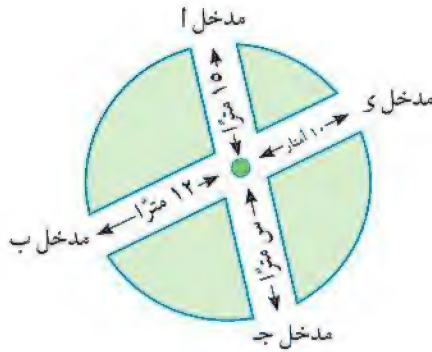
٩ دائرتان متحدتا المركز  $M$ ، طولاً نصفى قطريهما  $12$  سم،  $7$  سم، رسم الوتر  $AK$  في الدائرة الكبرى ليقطع الدائرة الصغرى في  $B$ ،  $J$  على الترتيب. أثبت أن:  $AB \times BK = 90$



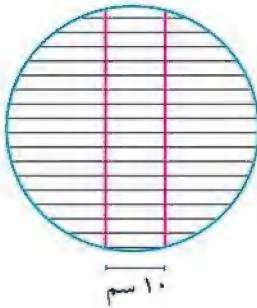
- ١٠)  $\overline{AB}$  جزء مستطيل فيه  $AB = 6$  سم،  $B = 8$  سم. رسم  $\overline{BH} \perp \overline{AG}$  فقطع  $\overline{AG}$  في  $H$ ،  $\overline{AH}$  في  $O$ .  
 أ) أثبت أن  $(AB)^2 = AO \times AH$ .  
 ب) أوجد طول  $AO$ .



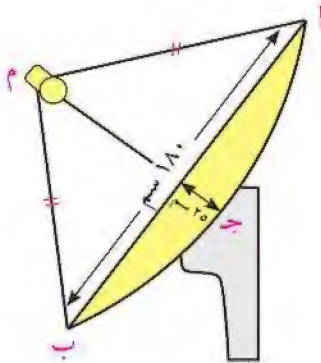
- ١١) **الربط مع الصناعة:** كُسر أحد تروس آلة ولاستبداله مطلوب معرفة طول نصف قطر دائرته. يبين الشكل المقابل جزءاً من هذا الترس، والمطلوب تعيين طول نصف قطر دائرته



- ١٢) **الربط مع البيئة:** يبين الشكل المقابل مخططاً لحديقة على شكل دائرة بها طريقان يتقاطعان عند نافورة المياه. أوجد بُعد نافورة المياه عند المدخل جـ.



- ١٣) **الربط مع المنزل:** تستخدم هدى شبكة لشي اللحوم على شكل دائرة من السلك، طول قطرها ٥٠ سم، يدعمها من الوسط سلكان متوازيان ومتساويان في الطول كما في الشكل المقابل، والبعد بينهما ١٠ سم. احسب طول كل من سلكي الدعامة.



- ١٤) **الربط مع الاتصال:** تنقل الأقمار الصناعية البرامج التلفزيونية إلى كافة مناطق الأرض، وتستخدم أطباق خاصة لاستقبال إشارات البث التلفزيوني، وهي أطباق مقعرة على شكل جزء من سطح كرة. يبين الشكل المقابل مقطعاً في أحد هذه الأطباق، طول قطره ١٨٠ سم، والمطلوب حساب طول نصف قطر كرة تقعره  $\overline{AB}$ .

## ملخص الوحدة

### Two Similar Polygons

### المضلعان المتشابهان

يتشابه مضلعان لهما نفس العدد من الأضلاع إذا كانت الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة

### Similarity Ratio

### نسبة التشابه (معامل التشابه)

إذا كان المضلع  $أ/ب/ج/د/هـ$  ~ المضلع  $أ/ب/ج/د/هـ$  يكون  $ك$  معامل تشابه المضلع  $أ/ب/ج/د/هـ$  للمضلع  $أ/ب/ج/د/هـ$  حيث  $\frac{أ}{أ} = \frac{ب}{ب} = \frac{ج}{ج} = \frac{د}{د} = \frac{هـ}{هـ} = ك$  ،  $ك \neq 0$   
النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين تساوي معامل تشابههما

**مسلمة:** قضية أو عبارة رياضية يسلم بصحتها دون برهان ويستنتج منها حقائق تتعلق بالنظام، مثل: «إذا طابقت زاويتان في مثلث نظائرها في مثلث آخر كان المثلثان متشابهين».

**نتيجة (١):** إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع مثلث ويقطع الضلعين الآخرين أو المستقيمين الحاملين لهما فإن المثلث الناتج يشابه المثلث الأصلي.

**نتيجة (٢):** إذا رسم من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية عمود على الوتر انقسم المثلث إلى مثلثين، وكلاهما يشابه المثلث الأصلي.

**نظرية ١:** إذا تناسبت الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان.

**نظرية ٢:** إذا طابقت زاوية من مثلث زاوية من مثلث آخر، وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان كان المثلثان متشابهين.

### The relation between the area of two similar polygons

### العلاقة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين

**نظرية ٣:** النسبة بين مساحتي سطحين مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما.

**حقيقة:** المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التي يشابه كل منها نظيره.

**نظرية ٤:** النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما.

### @ معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:





## نظريات التناسب في المثلث

## The Triangle Proportionality Theorems

معبد حتشيسوت بالأقصر

## أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة يكون الطالب قادرًا على أن:

- يعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة) وعكسها، ونتائج عليها.
- يعرف ويبرهن نظرية تاليس العامة التي تنص على: (إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر). وحالات خاصة منها.
- يعرف ويبرهن النظرية التي تنص على: (إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس،
- قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولى الضلعين الآخرين) وحالات خاصة منها.
- يوجد قوة نقطة بالنسبة لدائرة (القواطع والمماسات).
- يستنتج قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات في دائرة.
- يحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلي والخارجي.

## المصطلحات الأساسية

منصف خارجي	Bisector	منصف	Midpoint	نقطة تنصيف	Ratio	نسبة
Exterior Bisector		منصف داخلي	Median	متوسط	Proportion	تناسب
Perpendicular	عمودي على	Interior Bisector	Transversal	قاطع	Parallel	يوازي



## دروس الوحدة

- الدرس (٣ - ١): المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة.
- الدرس (٣ - ٢): منصف الزاوية والأجزاء المتناسبة.
- الدرس (٣ - ٣): تطبيقات التناسب فى الدائرة.

## الأدوات المستخدمة

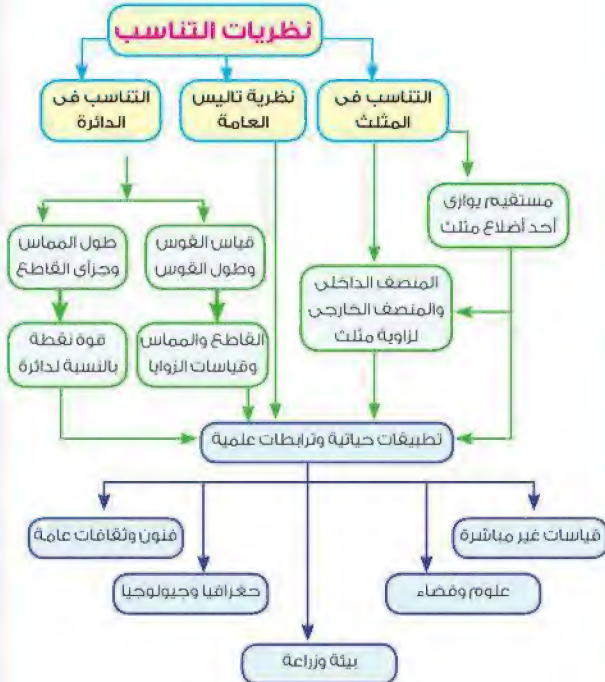
- أدوات هندسية للرسم والقياس - حاسب آلى - برامج رسومية - جهاز عرض بيانات - ورق مربعات - خيوط - مقص

## نبذة تاريخية

الرياضيات نشاط فكري ممتع يجعل الذهن متفتحاً، والعقل صحواً، وتسهم فى حل كثير من المشكلات والتحديات العملية والعلمية والحياتية، من خلال تمثيلها أو نمذجتها بعلاقات بلغة الرياضيات ورموزها؛ ليتم حلها، ثم إعادتها إلى أصولها المادية.

فطن قدماء المصريين لذلك فأقاموا المعابد والأهرامات وفق خطوط مستقيمة بعضها متوازى والآخر قاطع لها، كما حرثوا الأراضي الزراعية فى خطوط مستقيمة متوازية، وقد أخذ الإغريق الهندسة عن المصريين القدماء فوضع إقليدس (٣٠٠ ق.م) نظاماً هندسياً متكاملًا عرف بالهندسة الإقليدية وتقوم على مسلمات خمس، أهمها: مسلمة التوازي وهى: "من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازي مستقيماً معلوماً". وتُعني الهندسة الإقليدية بالأشكال المستوية (المثلثات - المضلعات - الدوائر) والأشكال ثلاثية الأبعاد، كما أن لها تطبيقات عملية فى مجالات متعددة منها إنشاء الطرق والكبارى وتخطيط المدن وإعداد خرائطها التى تعتمد على توازي المستقيمات والمستقيمات القاطعة لها وفق تناسب بين الطول الحقيقي والطول فى الرسم (مقياس الرسم).

## مخطط تنظيمى للوحدة



# المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

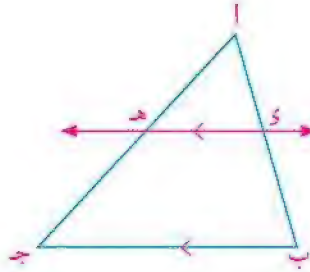
## Parallel Lines and Proportional Parts

٣ - ١

### سوف تتعلم

- خصائص المستقيم الموازي لأي ضلع من أضلاع مثلث.
- استخدام التناسب في حساب أطوال وبرهنة علاقات لقطع مستقيمة ناتجة عن قواطع مستقيمات متوازية.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن المستقيمات المتوازية وقواطعها.

### فكر ناقش

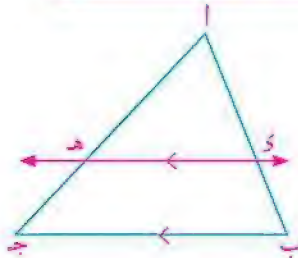


- ١- ارسم المثلث  $ABC$ ، عيّن نقطة  $D$  على  $AB$  ثم ارسم  $DE \parallel BC$  ويقطع  $AC$  في  $E$ .
- ٢- أوجد بالقياس طول كل من:  $AD$ ،  $DB$ ،  $AE$ ،  $EC$

- ٣- احسب النسبتين  $\frac{AD}{DB}$ ،  $\frac{AE}{EC}$  وقارن بينهما. ماذا تلاحظ؟  
إذا تغير موقع  $DE$  محافظاً على توازيه مع  $BC$ .  
هل تتغير العلاقة بين  $\frac{AD}{DB}$ ،  $\frac{AE}{EC}$ ؟ ماذا نستنتج؟

إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

### نظرية



المعطيات:  $AB$  مثلث،  $DE \parallel BC$   
المطلوب:  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$   
البرهان:  $\therefore DE \parallel BC$

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$  (مسلمة التشابه)  
ويكون:  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$  (١)

$\therefore AD \cdot AC = AB \cdot AE$

$\therefore AD \cdot AC = AB \cdot AE$  (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

ويكون:  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$$\frac{AD}{AB} + 1 = \frac{AE}{AC} + 1$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

ومن خواص التناسب نجد أن:  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$  (وهو المطلوب)

### المصطلحات الأساسية

Parallel	يوازي
Midpoint	منتصف
Median	متوسط
Transversal	قاطع

### الأدوات والوسائل

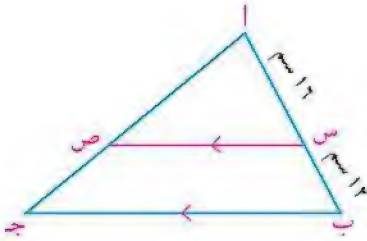
- أدوات هندسية للرسم والقياس.
- حاسب آلي.
- برامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.



**لاحظ أن:**  $\frac{اي}{ي ب} = \frac{اه}{ه ج}$   $\therefore \frac{اي + اه}{ي ب} = \frac{اه + ه ج}{ه ج}$

**أي أن:**  $\frac{اج}{ه ج} = \frac{اب}{ي ب}$

**مثال**



١ في الشكل المقابل:  $\overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$ ،  $اس = ١٦$  سم،  $ب س = ١٢$  سم.

أ إذا كان  $اص = ٢٤$  سم، أوجد  $ص ج$ .

ب إذا كان  $ج ص = ٢١$  سم، أوجد  $ا ج$ .

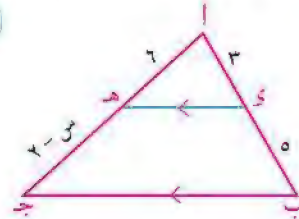
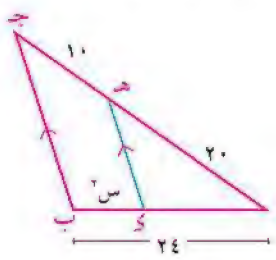
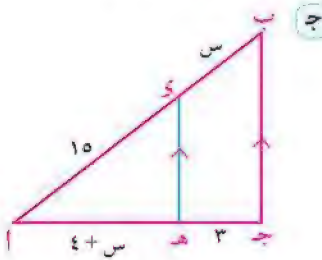
**الحل**

أ  $\therefore \overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$   $\therefore \frac{اس}{س ب} = \frac{اص}{ص ج}$   
ويكون:  $\frac{١٦}{١٢} = \frac{٢٤}{ص ج}$   $\therefore ص ج = \frac{٢٤ \times ١٢}{١٦} = ١٨$  سم.

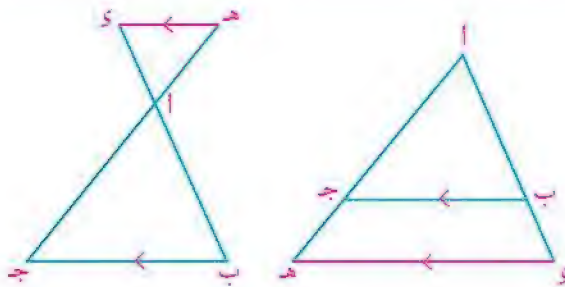
ب  $\therefore \overline{س ص} \parallel \overline{ب ج}$   $\therefore \frac{اب}{ب س} = \frac{اج}{ج ص}$   
ويكون:  $\frac{١٦}{١٢} = \frac{اج}{٢١}$   $\therefore ا ج = \frac{٢١ \times ١٦}{١٢} = ٢٨$  سم.

**حاول أن تحل**

١ في كل من الأشكال التالية:  $\overline{و ه} \parallel \overline{ب ج}$ . أوجد قيمة  $س$  العديدة (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



**نتيجة** إذا رسم مستقيم خارج مثلث  $ا ب ج$  يوازي ضلعاً من أضلاع المثلث، وليكن  $\overline{ب ج}$ ، ويقطع  $\overline{ا ب}$ ،  $\overline{ا ج}$  في  $ي$ ،  $ه$  على الترتيب فإن:  $\frac{اب}{ب ي} = \frac{اج}{ه ج}$  (كما في الشكل).

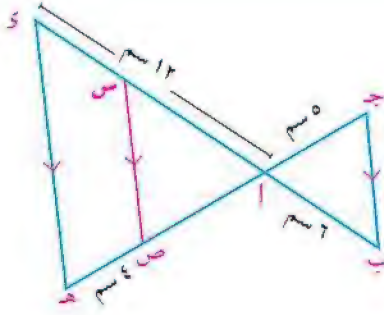


بتطبيق خواص التناسب نستنتج أن:

$$\frac{اي}{ا ب} = \frac{اه}{ا ج} , \frac{اي}{ب ي} = \frac{اه}{ه ج}$$



## مثال



٢ في الشكل المقابل: جـه  $\cap$  بـي =  $\{A\}$ ، س  $\ni$  آي  
ص  $\ni$  آهـ حيث سـ ص // بـ جـ // هـ يـ.  
إذا كان أب = ٦ سم، أج = ٥ سم، آي = ١٢ سم، هـ ص = ٤ سم.  
أوجد طول كل من آهـ، يـ سـ.

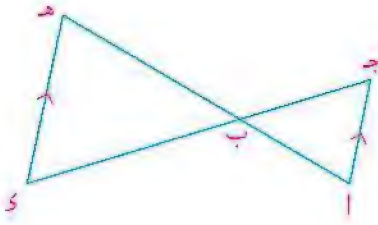
## الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{هـ يـ} // \text{بـ جـ} & \quad \text{جـهـ} \cap \text{بـ يـ} = \{A\}, \\ \therefore \frac{\text{آي}}{\text{أب}} &= \frac{\text{آهـ}}{\text{أجـ}} \quad \text{ويكون: } \frac{12}{5} = \frac{\text{آهـ}}{4} \end{aligned}$$

في  $\triangle$  آهـ يـ:

$$\begin{aligned} \therefore \text{سـ صـ} // \text{هـ يـ} & \quad \therefore \frac{\text{آي}}{\text{يـ سـ}} = \frac{\text{آهـ}}{\text{هـ صـ}} \\ \text{ويكون } \frac{12}{4} &= \frac{\text{يـ سـ}}{8} \quad \therefore \text{يـ سـ} = 24 \text{ سم} \end{aligned}$$

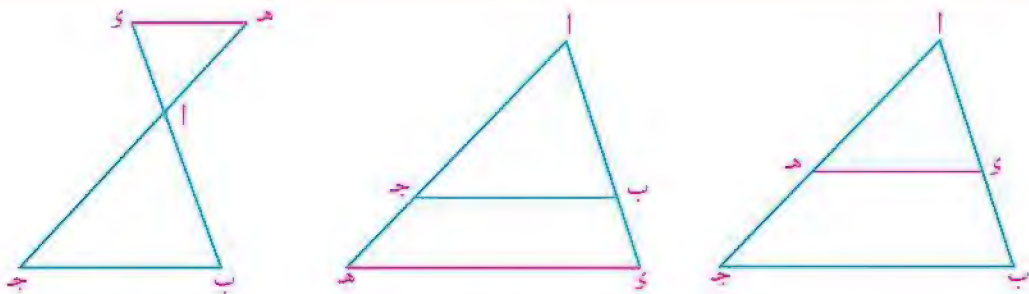
## حاول أن تحل



٢ في الشكل المقابل: يـ هـ // آجـ، آهـ  $\cap$  جـ يـ = {ب}  
أ إذا كان: أب = ٨ سم، ب جـ = ٩ سم، ب هـ = ١٢ سم.  
أوجد طول بـ يـ.  
ب إذا كان: أب = ٦ سم، ب هـ = ٩ سم، جـ يـ = ١٨ سم.  
أوجد طول بـ جـ.

## عكس نظرية ١

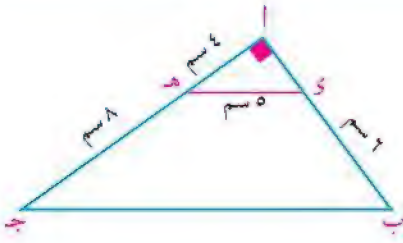
إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث.



في الأشكال الثلاثة السابقة: أب جـ مثلث، يـ هـ يقطع آب في يـ، آجـ في هـ. وكان  $\frac{\text{آي}}{\text{بـ يـ}} = \frac{\text{آهـ}}{\text{هـ جـ}}$   
فإن يـ هـ // بـ جـ

**تفكير منطقي:** هل  $\triangle$  آي هـ  $\sim \triangle$  أب جـ؟ ولماذا؟ - هل  $\triangle$  آي هـ  $\equiv \triangle$  أب جـ؟ فسر إجابتك.  
اكتب برهاناً لعكس النظرية.

مثال



٣ في الشكل المقابل:  $AB \parallel DE$  أثبت أن:  $AD \parallel BE$ . أوجد طول  $BE$ .

الحل

أ: المثلث  $ADE$  قائم الزاوية في  $A$

(نظرية فيثاغورث)

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \frac{DE}{AE} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

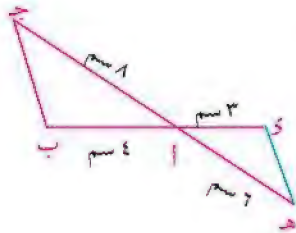
$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{DE}{AE} \text{ ويكون } AD \parallel BE$$

ب:  $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABE$  (لماذا)  $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BE}$

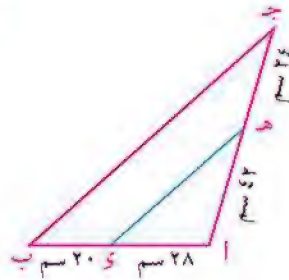
$$\therefore \frac{3}{3+8} = \frac{5}{BE} \Rightarrow BE = \frac{5 \times 11}{3} = \frac{55}{3}$$

حاول أن تحل

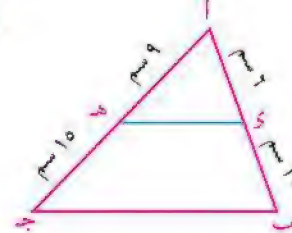
٣ في كل من الأشكال التالية حدد ما إذا كان  $AD \parallel BE$  أم لا.



ج



ب

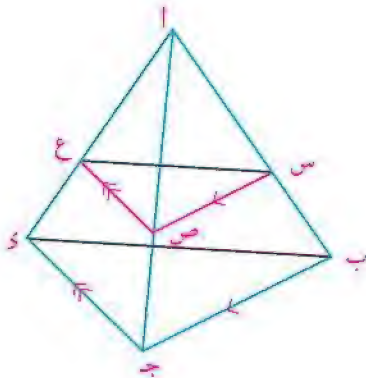


أ

مثال

٤  $AB \parallel CD$  شكل رباعي فيه  $S \in AB$ ،  $V \in AC$  حيث  $SV \parallel BC$ ، رسم  $SV \parallel CD$  ويقطع  $AV$  في  $E$ . أثبت أن  $SE \parallel BV$ .

الحل



في  $\triangle ABC$ :  $\therefore SV \parallel BC$   $\therefore \frac{AS}{SB} = \frac{AV}{VC}$  (١)

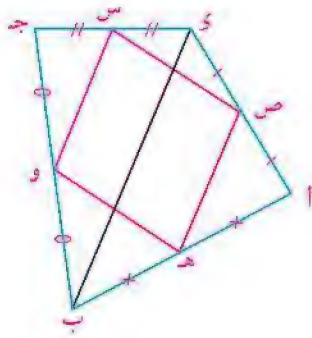
في  $\triangle ACD$ :  $\therefore SE \parallel CD$   $\therefore \frac{AS}{SB} = \frac{AE}{ED}$  (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن:  $\frac{AS}{SB} = \frac{AE}{ED}$

في  $\triangle ABE$ :  $\therefore SE \parallel BV$   $\therefore \frac{AS}{SB} = \frac{AE}{ED}$

### حاول أن تحل

٤) ا ب ج د شكل رباعي تقاطع قطراه في م. رسم م ه // آ د ويقطع ا ب في ه، رسم م و // ج د ويقطع ب ج في و. أثبت أن: ه و // آ د

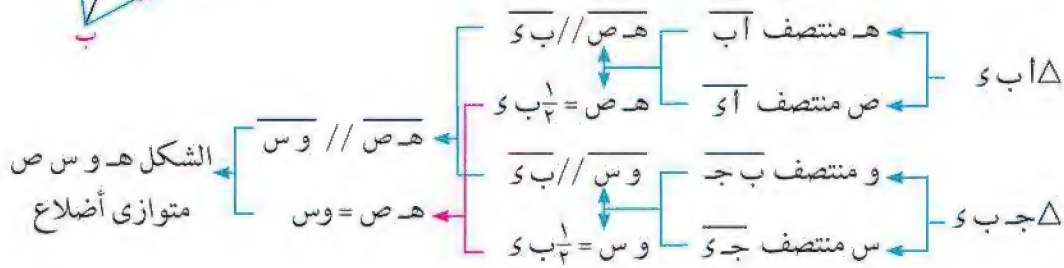


**تفكير منطقي:** إذا كان ه، و، س، ص منتصفات الأضلاع ا ب، ب ج، ج د، د ا في الشكل الرباعي ا ب ج د.

هل الشكل ه و س ص متوازي أضلاع؟

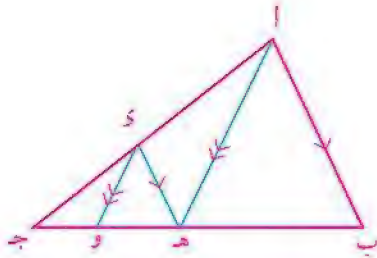
**افهم:** ما المطلوب؟ متى يكون الشكل متوازي أضلاع؟

**خط:** كون مثلثات برسم ب د التي تقسم الشكل إلى مثلثين.



**حل:** اكتب العبارات الرياضية المناسبة للبرهان ومبرراتها.

**تحقق:** ابحث هل ه و // س ص؟ فسر إجابتك.



### حاول أن تحل

٥) في الشكل المقابل: ا ب ج د مثلث، د ع // ا ب، د ه // ا ب

ا ب ج د ه ع د ه

ارسم مخططاً يوضح كيفية إثبات أن (ج ه) = ج و × ج ب.

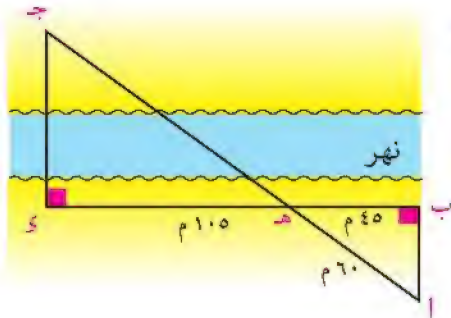
### مثال

٥) **تحديد المواقع:** لتحديد الموقع ج، قام المساحون بالقياس

وإعداد المخطط المقابل.

أوجد بُعد الموقع ج عن الموقع أ

**الحل**



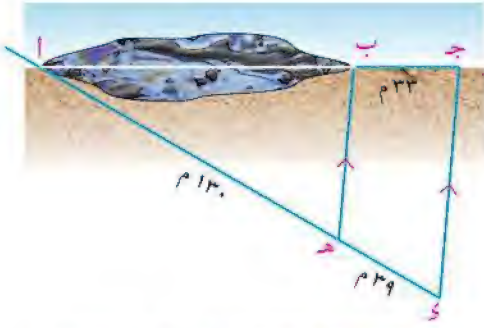
ا ب ج د، ج د  $\perp$  ا ب، ا ب  $\perp$  ج د، ا ب // ج د

$\therefore$  ا ب ج د، ا ب // ج د، {ه} = ا ب ج د

$\therefore$  ا ب ج د، ا ب // ج د، {ه} = ا ب ج د

ا ب ج د = ١٥٠ × ٦٠ / ٤٥ = ٢٠٠ متر.





**حاول أن تحل**

٦ **مكافحة التلوث:** قام فريق مكافحة التلوث بتحديد موقع بقعة زيت على أحد الشواطئ كما في الشكل المقابل. احسب طول بقعة الزيت.



لعلك لاحظت إمكانية استخدام توازي مستقيم لأحد أضلاع مثلث في تطبيقات حياتية كثيرة.

يوضح الشكل المقابل بوابة أحد الماشات الزراعية، وهي مكونة من قطع خشبية متوازية وأخرى قاطعة لها.

هل توجد علاقة بين أطوال أجزاء قواطع هذه القطع المتوازية؟

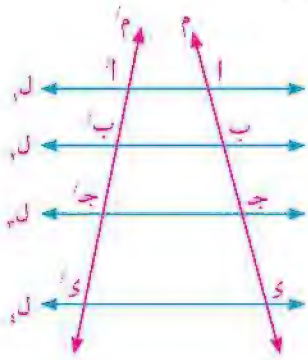
مَذْحِجَةٌ

لبحث وجود علاقة أم لا. نمذج المشكلة (ضع نموذجاً رياضياً للمشكلة) كما يلي:

١- ارسم المستقيمات ل، // ل // ل، م، م / قاطعان لها في أ، ب، ج، د، أ، ب، ج، د، / على الترتيب كما بالشكل المقابل.

٢- قس أطوال القطع المستقيمة وقارن النسب التالية:

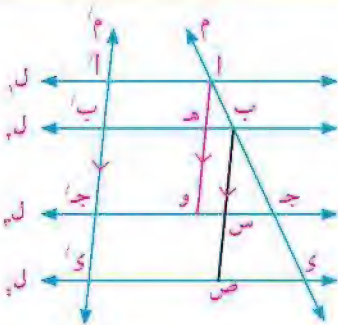
ماذا نستنتج؟



## نظرية تاليس العامة

## Talis' Theorem

إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



المعطيات: ل // ل // ل // ل // ل // م، م / قاطعان لها  
المطلوب: ا ب : ب ج : ج د = ا ب : ب ج : ج د / ا  
البرهان : ارسم  $\overleftrightarrow{AO}$  // م'، ويقطع ل في ه، ل في و،  
ب ض // م'، ويقطع ل في س، ل في ص.  
 $\therefore \overline{OA} // \overline{OB}$  ،  $\overline{OH} // \overline{AB}$   
 $\therefore \overline{AHB}$  / متوازي أضلاع ويكون:  $\overline{AH} = \overline{AB}$

بالمثل: هـ و = ب / ج ، ب س = ب / ج ، س ص = ج / ي  
في  $\Delta$  ج و:

$$\therefore \overline{ب ه} // \overline{ج و} \quad \therefore \frac{ا ه}{ب ه} = \frac{ا ب}{ب ج}$$

ويكون:  $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا ب}{ب ج} ، \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا ب}{ب ج}$  ، (إبدال الوسطين) (١)  
بالمثل  $\Delta$  ب ي ص:

$$\therefore \frac{ب ج}{ج ي} = \frac{ب ج}{ج ي} ، \frac{ب ج}{ج ي} = \frac{ب ج}{ج ي}$$

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ج}{ج ي} = \frac{ا ب}{ب ج}$$

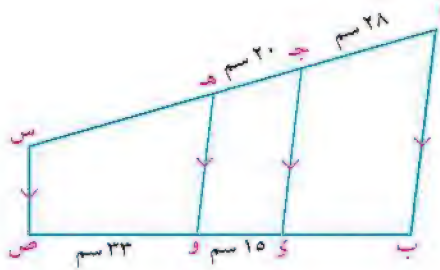
$\therefore ا ب : ب ج : ج ي = ا ب : ب ج : ج ي$  وهو المطلوب.

### حاول أن تحل

٧ اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدمًا الشكل السابق:

أ  $\frac{ا ج}{ج ي}$  ب  $\frac{ا ج}{ب ج}$  ج  $\frac{ب ي}{ا ي}$  د  $\frac{ا ي}{ب ي}$  هـ  $\frac{ا ب}{ب ي}$

### مثال



٦ في الشكل المقابل:  $\overline{ا ب} // \overline{ج د} // \overline{هـ و} // \overline{س ص}$  ،  
ا ج = ٢٨ سم، ج هـ = ٢٠ سم، ي و = ١٥ سم، و ص = ٣٣ سم.  
أوجد طول كل من: ب ي ، هـ س

### الحل

$$\therefore \overline{ا ب} // \overline{ج د} // \overline{هـ و} // \overline{س ص}$$

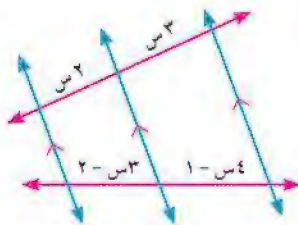
$$\therefore \frac{ا ج}{ب ج} = \frac{ج هـ}{هـ س} = \frac{ا ج}{ب ج}$$

$$\therefore \frac{٢٨}{ب ي} = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{٢٨}{٣٣}$$

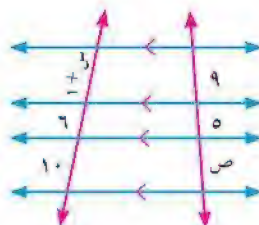
$$\therefore ب ي = ٢١ سم ، هـ س = ٤٤ سم.$$

### حاول أن تحل

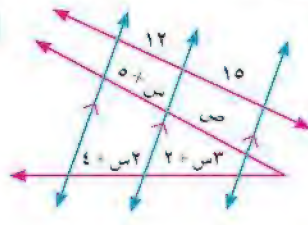
٨ في كل من الأشكال التالية، المستقيمات الحمراء تقطع مستقيمتين متوازيتين. احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالاستيمترات)



ج



ب



أ

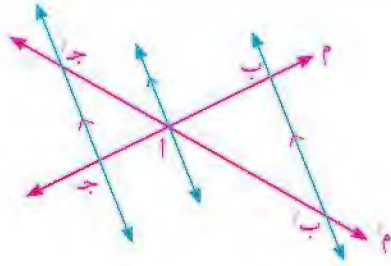
### حالات خاصة

١- إذا تقاطع المستقيمان م، م' في النقطة أ

وكان:  $\vec{AB} // \vec{A'B'}$ ، فإن:  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'}$

وبالعكس: إذا كان:  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'}$

فإن:  $\vec{AB} // \vec{A'B'}$



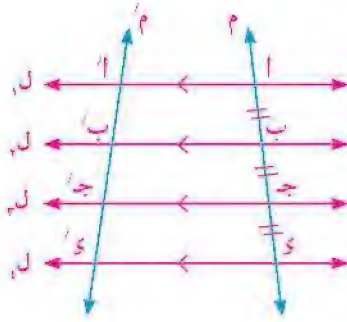
### نظرية تاليس الخاصة

٢- إذا كانت أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين متساوية فإن

أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر تكون متساوية كذلك.

في الشكل المقابل ل، ل' // ل، ل'، قطعها المستقيمان م، م'

وكان:  $AB = BC = CD$  فإن:  $A'B' = B'C' = C'D'$



### مثال

٧ في الشكل المقابل أوجد القيمة العددية لكل من س، ص.

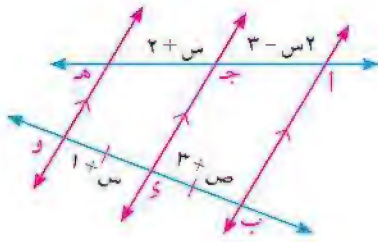
### الحل

$\because \vec{AB} // \vec{CD} // \vec{HO}$ ،  $B = D = O$

$\therefore AB = CD$

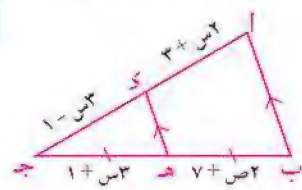
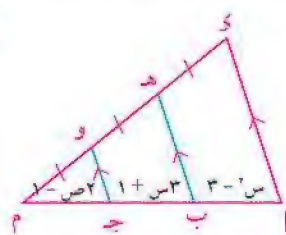
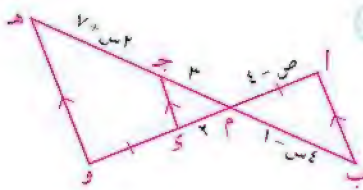
ويكون:  $2S - 3 = 3 + S \Rightarrow S = 5$

$\because B = D = O$ ،  $S = 5$   $\therefore 1 + 5 = 3 + V \Rightarrow V = 3$



### حاول أن تحل

٩ في كل مما يأتي أوجد قيمة س، ص العددية. (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



### فكر

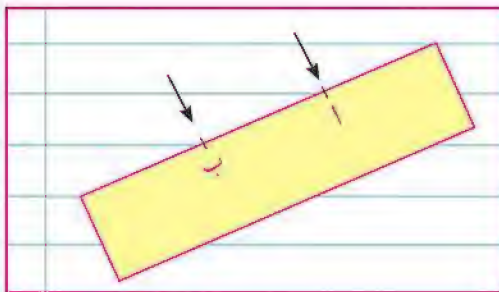
أراد يوسف تقسيم شريط من الورق إلى ٣ أجزاء متساوية

في الطول، فقام بوضعها على صفحة كراسته كما بالشكل

المقابل وحدد نقطتي التقسيم أ، ب.

هل تقسيم يوسف للشريط صحيحاً؟ فسر إجابتك.

استخدم أدواتك الهندسية للتحقق من صحة إجابتك.





**مثال**

[illegible]

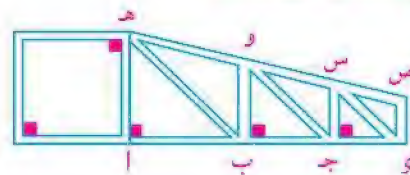
∴ و، هـ، و مساقط النقط ا، ب، ج على الأفقى  
 ∴ آى // بـه // جـو ، آجـ ، و قاطعان لها

∴ ا.ج. ≈ ۱۹ متر

$$\therefore \text{اج} = \frac{12,8 \times 1,2}{0,8} = 19,2 \text{ متراً}$$

**حاول أن تحل**

١٠٠ ١ الربط بالإنشاءات:

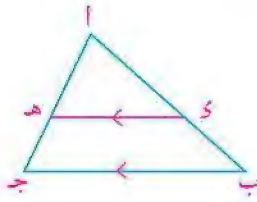


أوجد من الشكل  $\frac{a}{b+c}$  بعدة طرق مختلفة، كلما أمكنك ذلك. هل حصلت على نفس الناتج؟

**؟ تحقق من قسمك**



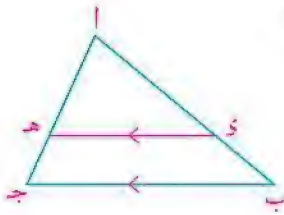
## تمارين ٣ - ١



١) في الشكل المقابل  $\overline{هـ} // \overline{ب ج}$  أكمل:

أ) إذا كان  $\frac{٥}{٣} = \frac{١}{ب}$  فإن:  $\frac{١}{ب} = \frac{١}{ب}$  ،  $\frac{ج هـ}{١} = \frac{ج هـ}{١}$

ب) إذا كان  $\frac{٤}{٥} = \frac{١}{ج}$  فإن:  $\frac{ج هـ}{١} = \frac{ج هـ}{١}$  ،  $\frac{ب ك}{١} = \frac{ب ك}{١}$



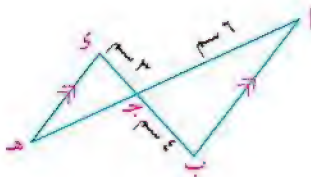
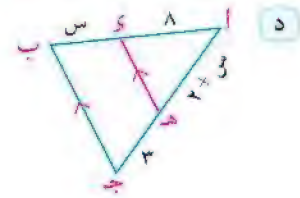
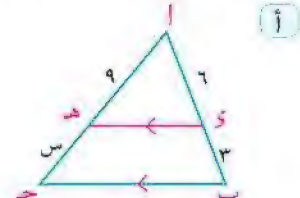
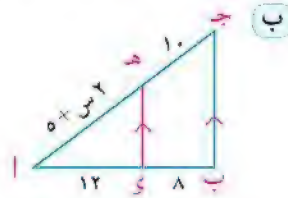
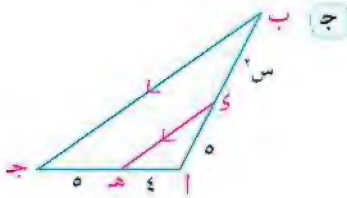
٢) في الشكل المقابل  $\overline{هـ} // \overline{ب ج}$ . حدد العبارات الصحيحة من ما يلي:

أ)  $\frac{١}{ب} = \frac{١}{ب}$  ب)  $\frac{١}{هـ} = \frac{١}{هـ}$

ج)  $\frac{١}{ب} = \frac{١}{ب}$  د)  $\frac{١}{ج} = \frac{١}{ج}$

هـ)  $\frac{١}{ب} = \frac{١}{ب}$  و)  $\frac{١}{ب} = \frac{١}{ب}$

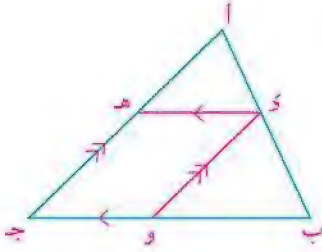
٣) في كل من الأشكال التالية  $\overline{هـ} // \overline{ب ج}$ . أوجد قيمة س العددية (الأطوال بالسنتيمترات).



٤) في الشكل المقابل:  $\overline{أ ب} // \overline{و هـ}$  ،  $\overline{أ هـ} \cap \overline{ب و} = {ج}$

أ ج = ٦سم ، ب ج = ٤سم ، ج و = ٣سم  
أوجد طول ج هـ

٥) س ص  $\cap$  ع ل = {م}، حيث س ع // ل ص، فإذا كان س م = ٩ سم، ص م = ١٥ سم، ع ل = ٣٦ سم. أوجد طول ع م.



٦) لكل مما يأتي: استخدم الشكل المقابل والبيانات المعطاة لإيجاد قيمة س:

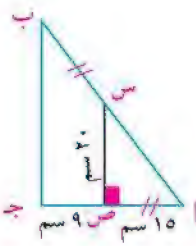
أ) اى = ٤، بى = ٨، ج هـ = ٦، ا هـ = س.

ب) ا هـ = س، هـ ج = ٥، اى = س - ٢، بى = ٣.

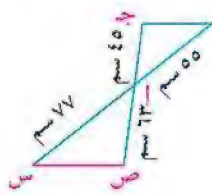
ج) ا ب = ٢١، ب و = ٨، و ج = ٦، اى = س.

د) اى = س، ب و = س + ٥، ٢ بى = ٣ و ج = ١٢.

٧) فى كل من الأشكال التالية، حدد ما إذا كان س ص // ب جـ



جـ



بـ



أـ

٨) س ص ع مثلث فيه س ص = ١٤ سم، س ع = ٢١ سم، ل  $\exists$  س ص بحيث س ل = ٦ سم،

م  $\exists$  س ع حيث س م = ٨ سم. أثبت أن ل م // ص ع

٩) فى المثلث ا ب جـ، ل  $\exists$  ا ب، هـ  $\exists$  ا جـ، ا هـ = ٤ هـ جـ.

إذا كان اى = ١٠ سم، لى = ٨ سم. حدد ما إذا كان لى هـ // ب جـ. فسر إجابتك.

١٠) ا ب جـ و شكل رباعي تقاطع قطراه فى هـ. فإذا كان ا هـ = ٦ سم، ب هـ = ١٣ سم، هـ و = ١٠ سم،

هـ دى = ٨ سم. أثبت أن الشكل ا ب جـ و شبه منحرف.

١١) أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث يوازي ضلعه الثالث، وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع.

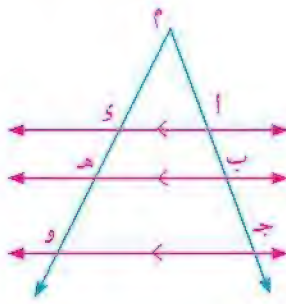
١٢) ا ب جـ مثلث، ل  $\exists$  ا ب حيث اى = ٣ لى = ٢، هـ  $\exists$  ا جـ حيث هـ جـ = ٥ جـ د = ٣ ا جـ، رسم ا س يقطع ب جـ فى س. إذا كان ا و = ٨ سم، ا س = ٢٠ سم، حيث و  $\exists$  ا س. أثبت أن النقط لى، و، هـ على استقامة واحدة.

١٣) ا ب جـ مثلث، ل  $\exists$  ب جـ، حيث لى = ٣ جـ د = ٤، هـ  $\exists$  اى، بحيث اى = ٣ لى = ٢، رسم ج هـ يقطع ا ب فى س، رسم لى و // ج س يقطع ا ب فى ص. أثبت أن ا س = ب ص.

١٤) ا ب جـ و مستطيل تقاطع قطراه فى م. هـ منتصف ا م، و منتصف م جـ. رسم لى هـ يقطع ا ب فى س، ورسم لى و يقطع ب جـ فى ص. أثبت أن: س ص // ا جـ.

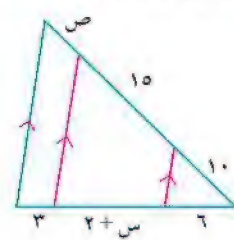
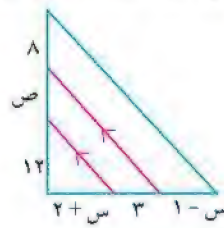
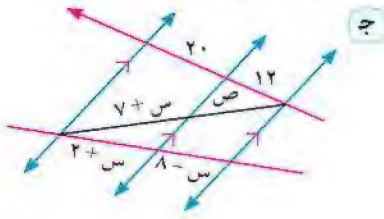


١٥) اكتب ما تساويه كل من النسب التالية مستخدماً الشكل المقابل:

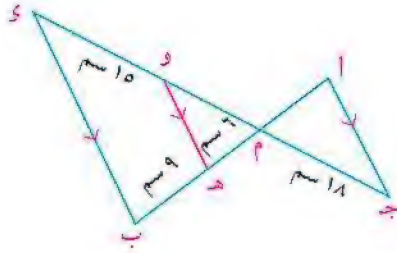


ب	$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{هـ}$	ا	$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{هـ}$
د	$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{و}$	ج	$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{و}$
و	$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{ز}$	هـ	$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{ز}$
ح	$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{و}$	ز	$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{و}$

١٦) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



١٧) في الشكل المقابل:



$\overline{ا} \cap \overline{ج} = \{م\}$ ،  $هـ \ni م$ ،  
 $و \ni م$ ،  $\overline{ا} \parallel \overline{و}$  و  $\overline{هـ} \parallel \overline{ب}$

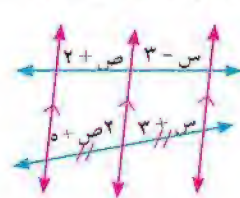
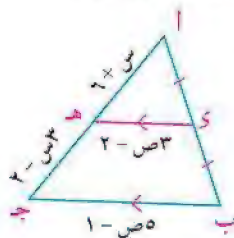
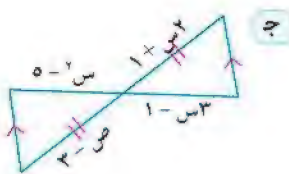
أوجد:

ا) طول م و  
 ب) طول ا م

١٨)  $\overline{ا} \cap \overline{ج} = \{هـ\}$ ،  $س \ni ا$ ،  $ص \ni ج$ ، وكان  $\overline{س} \parallel \overline{ب} \parallel \overline{ا}$

أثبت أن:  $اس \times هـ = جص \times هـ$

١٩) في كل من الأشكال التالية، احسب قيم س، ص العددية:



٢٠) ا ب ج د شكل رباعي فيه  $\overline{ا} \parallel \overline{ب}$ ، تقاطع قطراه في م، نصف  $\overline{ب} \parallel \overline{ج}$  في هـ،

ورسم  $\overline{هـ} \parallel \overline{ا}$ ، ويقطع  $\overline{ب}$  في س،  $\overline{ا} \parallel \overline{ج}$  في ص،  $\overline{ا} \parallel \overline{و}$ .

أثبت أن:

ا)  $هـص = \frac{١}{٢} ا ب$ .  
 ب)  $\frac{ا}{ب} = \frac{ص}{س}$

## منصفا الزاوية والأجزاء المتناسبة

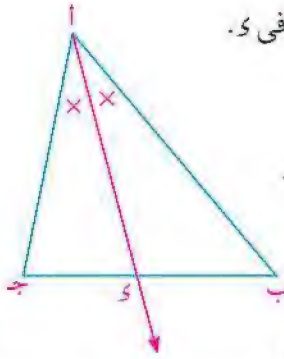
### Angle Bisectors and Proportional Parts

٢ - ٣

#### سوف نتعلم

- خصائص منصفات زوايا المثلث.
- استخدام التناسب في حساب أطوال القطع المستقيمة الناتجة عن تنصيف زاوية في مثلث.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن منصفات زوايا المثلث.

#### عمل تعاوني



- ١- ارسم المثلث  $ABC$ ، وارسم  $AD$  ليقطع  $BC$  في  $D$ .
- ٢- قس كلًا من  $AD$ ،  $BD$ ،  $AB$ ،  $AC$ .
- ٣- احسب كل من النسبتين  $\frac{BD}{AD}$ ،  $\frac{AB}{AC}$  وقارن بينهما. ماذا تستنتج؟
- ٤- كرر العمل السابق عدة مرات. هل يتحقق استنتاجك؟ عبر عن استنتاجك بلغتك.

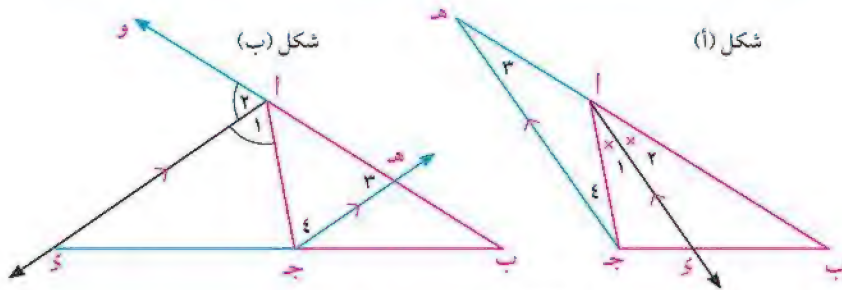
#### Bisector of an Angle of a Triangle

#### منصف زاوية مثلث

#### المصطلحات الأساسية

Bisector	منصف
Interior Bisector	منصف داخلي
Exterior Bisector	منصف خارجي
Perpendicular	عمودي

**نظرية ٣**  
إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، وقسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين فإن النسبة بين طوليها تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين



المعطيات:  $AD$  ينصف  $\angle BAC$

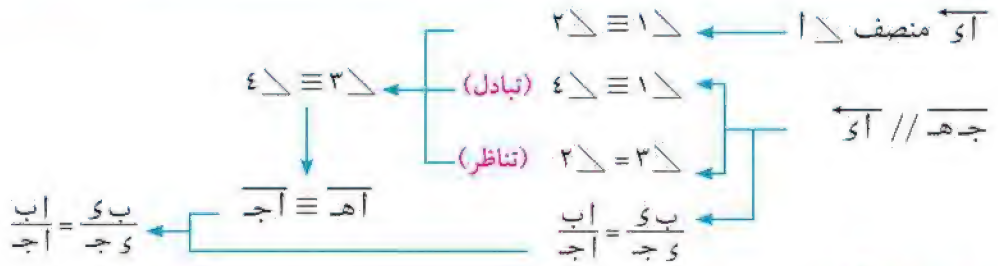
(من الداخل في شكل أ، من الخارج في شكل ب).

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

البرهان : ارسم  $DE \parallel AD$  ويقطع  $AC$  في  $E$ . اتبع المخطط التالي واكتب البرهان.

#### الأدوات والوسائل

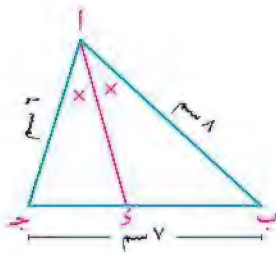
- أدوات هندسية للرسم.
- حاسب آلي وبرامج رسومية.
- جهاز عرض بيانات.



### مثال

١) أب جـ مثلث فيه أب = ٨ سم، أج = ٦ سم، ب ج = ٧ سم، رسم أى ينصف  $\angle$  ب أج ويقطع ب جـ فى ي. أوجد طول كل من ب ي، ي جـ

### الحل



∴ أى ينصف  $\angle$  ب أج ∴  $\frac{أب}{أج} = \frac{بى}{جى}$  (نظرية)

∴ أب = ٨ سم، أج = ٦ سم ∴  $\frac{٨}{٦} = \frac{بى}{جى}$

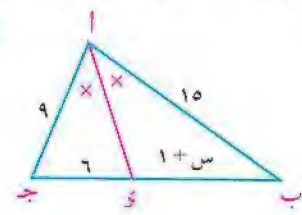
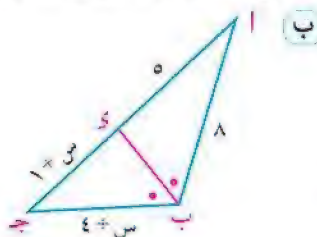
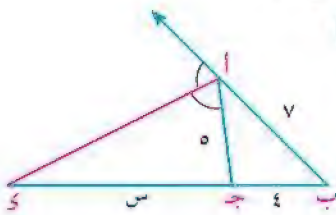
∴ ب ج = ب ي + ي ج = ٧ سم ∴  $\frac{٨}{٦} = \frac{بى}{٧ - بى}$

$٣ب = ٤ - ٢٨ = ٤$

$٧ب = ٤$  ∴ ب ي = ٤ سم، ج ي = ٣ سم (ضرب تبادلي)

### حاول أن تحل

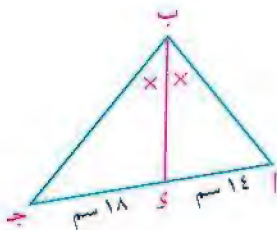
١) فى كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س العددية (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



### مثال

٢) أب جـ مثلث. رسم ب ي ينصف  $\angle$  ب، ويقطع أج فى ي، حيث أب = ١٤ سم، ب ج = ١٨ سم. إذا كان محيط  $\triangle$  أب جـ = ٨٠ سم، فأوجد طول كل من: ب جـ، أب.

### الحل



فى  $\triangle$  أب جـ

∴ ب ي ينصف  $\angle$  ∴  $\frac{أب}{ب ج} = \frac{بى}{ي ج}$

∴  $\frac{١٤}{١٨} = \frac{بى}{١٨ - بى}$

∴ محيط  $\triangle$  أب جـ = ٨٠ سم، أج = ١٤ + ١٨ = ٣٢ سم

∴ أب + ب ج = ٨٠ - ٣٢ = ٤٨ سم



$$\therefore \frac{7}{9} = \frac{اب}{بج} \quad \therefore \frac{9+7}{9} = \frac{اب+بج}{بج} \quad (\text{خواص التناسب})$$

$$\text{ويكون } \frac{16}{9} = \frac{48}{بج} \quad \therefore بج = 27 \text{ سم} , \quad اب = 21 \text{ سم}$$

### حاول أن تحل

- ٢- اب ج مثلث قائم الزاوية في ب. رسم  $\overrightarrow{آي}$  ينصف  $\angle ا$ ، ويقطع  $\overline{بج}$  في  $ي$ . إذا كان طول  $\overline{بي} = 24$  سم،  $ب : ا : ج = 3 : 5$  فأوجد محيط  $\triangle ابج$ .

### ملاحظة هامة

١- في المثلث اب ج حيث  $اب \neq اج$ :

إذا كان  $\overrightarrow{آي}$  ينصف  $\angle ب$  اج،

$\overrightarrow{آه}$  ينصف الزاوية الخارجة للمثلث عند ا.

$$\text{فإن: } \frac{ب ي}{ي ج} = \frac{ب ا}{ا ج} , \quad \frac{ب ه}{ه ج} = \frac{ب ا}{ا ج}$$

$$\text{ويكون } \frac{ب ي}{ي ج} = \frac{ب ه}{ه ج}$$

أي أن  $\overline{بج}$  تنقسم من الداخل في  $ي$  ومن الخارج في  $ه$  بنسبة واحدة

ويكون المنصفين  $\overrightarrow{آي}$ ،  $\overrightarrow{آه}$  متعامدين. (لماذا؟)

- ٢- إذا كان  $اب < اج$ ، قطع منصف  $\angle ا$  الضلع  $\overline{بج}$  في  $ي$  حيث  $ب ي < ي ج$ ، أما منصف الزاوية الخارجة عند ا فيقطع  $\overline{بج}$  في  $ه$  حيث  $ب ه < ه ج$ .

### تفكير ناقد

كلمة كبر اج ماذا يحدث للنقطة  $ي$ ؟

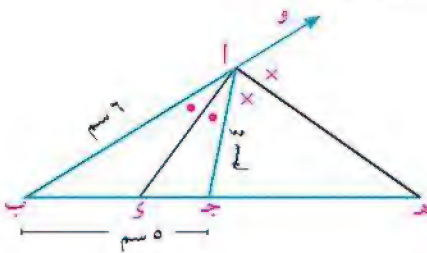
إذا كان  $اج = اب$  أين تقع النقطة  $ي$ ؟ وما وضع  $\overrightarrow{آه}$  بالنسبة إلى  $\overline{بج}$  عندئذ؟

عندما يصبح  $اج < اب$  ما العلاقة بين  $ي ج$ ،  $ب ي$ ؟ وأين تقع  $ه$  عندئذ؟ قارن إجابتك مع زملائك.

### مثال

- ٣- اب ج مثلث فيه  $اب = 6$  سم،  $اج = 4$  سم،  $بج = 5$  سم. رسم  $\overrightarrow{آي}$  ينصف  $\angle ا$  ويقطع  $\overline{بج}$  في  $ي$ ، ورسم  $\overrightarrow{آه}$  ينصف  $\angle ا$  الخارجة ويقطع  $\overline{بج}$  في  $ه$ . احسب طول  $\overline{ي ه}$ .

### الحل



$\therefore \overrightarrow{آي}$  ينصف  $\angle ا$ ،  $\overrightarrow{آه}$  ينصف  $\angle ا$  الخارجة

$\therefore ي$ ،  $ه$  تقسمان  $\overline{بج}$  من الداخل ومن الخارج بنفس النسبة.

$$\text{أي أن: } \frac{ب ي}{ي ج} = \frac{ب ه}{ه ج} = \frac{ب ا}{ا ج}$$

$$\therefore \frac{ب ي}{ي ج} = \frac{ب ه}{ه ج} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore ب ي = 3 , ي ج = 2 , ب ه = 3 , ه ج = 2 , 5 = بج = ب ي + ي ج$$

من خواص التناسب نجد

$$\begin{aligned} \frac{2+3}{2} &= \frac{5}{2} = \frac{ب ي + ج د}{ج} \\ \frac{2-3}{2} &= \frac{-1}{2} = \frac{ب ه - ج د}{ج} \\ \text{ويكون } 2 &= 5 - 3 = 2 \end{aligned}$$

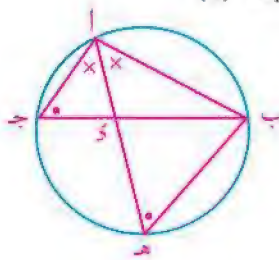
$$\begin{aligned} \frac{0}{2} &= \frac{0}{2} = \frac{ب ي}{ج} \\ \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} = \frac{ب ه}{ج} \\ 2 &= 10 + 2 = 12 \text{ سم} \end{aligned}$$

### حاول أن تحل

- ٣) **أ** ب ج مثلث فيه  $أ ب = 3$  سم،  $ب ج = 7$  سم،  $ج أ = 6$  سم. رسم  $أ ي$  ينصف  $\triangle أ ب ج$ ، ويقطع  $ب ج$  في  $ي$ ، ورسم  $أ ه$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  الخارجة ويقطع  $ب ج$  في  $ه$ .
- أ** أثبت أن  $أ ب$  متوسط في المثلث  $أ ج ه$ .
- ب** أوجد النسبة بين مساحة المثلث  $أ ي ه$ ، ومساحة المثلث  $أ ج ه$ .
- إيجاد طول المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية رأس مثلث.**

تمرين مشهور

**إذا كان**  $أ ي$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  في  $ي$  من الداخل ويقطع  $ب ج$  في  $ي$  فإن:  $أ ي = \sqrt{أ ب \times أ ج - ب ي \times ي ج}$



المعطيات:  $أ ب ج$  مثلث،  $أ ي$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  من الداخل،  $أ ي \cap ب ج = ي$

المطلوب:  $(أ ي)^2 = أ ب \times أ ج - ب ي \times ي ج$

البرهان : ارسم دائرة تمر برؤوس المثلث  $أ ب ج$

وتقطع  $أ ي$  في  $ه$ ، ارسم  $ب ه$

فيكون:  $\triangle أ ج ي \sim \triangle أ ه ب$  (لماذا؟)،  $\frac{أ ي}{أ ه} = \frac{أ ج}{أ ب}$

$\therefore أ ي \times أ ه = أ ب \times أ ج$

$أ ي \times (أ ي + ي ه) = أ ب \times أ ج$

$(أ ي)^2 = أ ب \times أ ج - أ ي \times ي ه$

$(أ ي)^2 = أ ب \times أ ج - ب ي \times ي ج$

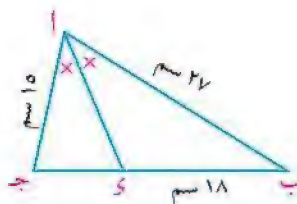
أي أن:  $أ ي = \sqrt{أ ب \times أ ج - ب ي \times ي ج}$

تذكر

$$أ ي \times ي ه = ب ي \times ي ج$$

مثال

- ٤) **أ** ب ج مثلث فيه  $أ ب = 27$  سم،  $أ ج = 15$  سم. رسم  $أ ي$  ينصف  $\triangle أ ب ج$  أو يقطع  $ب ج$  في  $ي$ . إذا كان  $ب ي = 18$  سم احسب طول  $أ ي$ .



الحل

$\therefore أ ي$  ينصف  $\triangle أ ب ج$   $\therefore \frac{أ ب}{أ ج} = \frac{ب ي}{ي ج}$

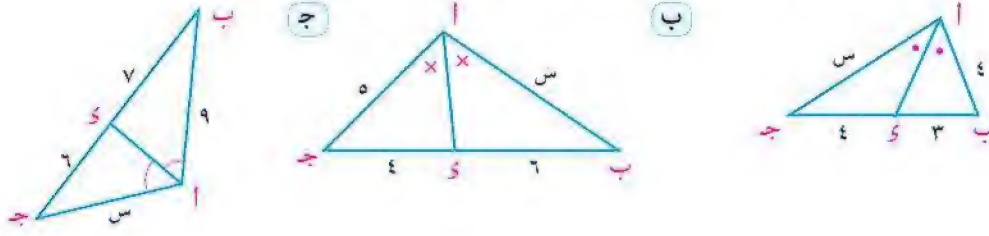
ويكون  $\frac{27}{15} = \frac{18}{ي ج}$   $\therefore ي ج = 10$  سم

$\therefore أ ي = \sqrt{أ ب \times أ ج - ب ي \times ي ج}$

$\therefore أ ي = \sqrt{27 \times 15 - 18 \times 10} = 9$  سم

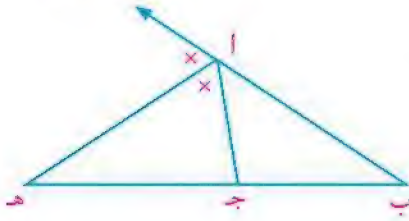
### حاول أن تحل

٤ في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة  $s$  وطول  $\overline{AI}$



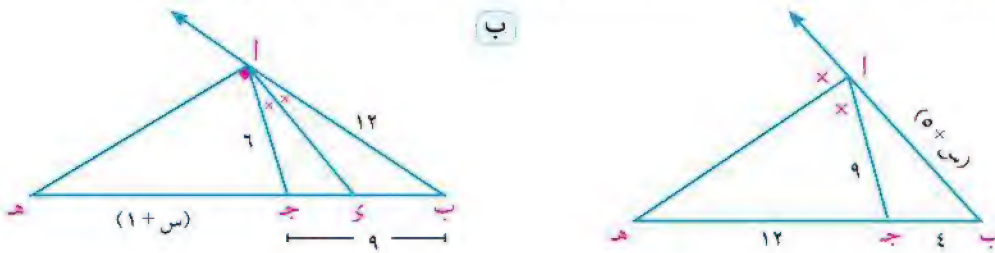
**لاحظ أن:** في الشكل المقابل:  $\overline{AH}$  ينصف  $\triangle BAJ$  من الخارج

ويقطع  $\overline{BJ}$  في  $H$ . فإن:  $AH = BH \times HJ = AB \times AJ$



### حاول أن تحل

٥ في كل من الأشكال التالية (الأبعاد مقدرة بالسنتيمترات) احسب قيمة  $s$ ، وطول  $\overline{AH}$



### مثال

٥ في الشكل المقابل:  $\overline{AI}$  متوسط في  $\triangle ABC$

$\overline{IS}$  ينصف  $\triangle AIB$ . ويقطع  $\overline{AB}$  في  $S$ .

$\overline{IV}$  ينصف  $\triangle AIC$  ويقطع  $\overline{AC}$  في  $V$ .

أثبت أن:  $\overline{SV} \parallel \overline{BC}$ .

### الحل

في  $\triangle AIB$ :  $\therefore \overline{IS}$  ينصف  $\triangle AIB$

في  $\triangle AIC$ :  $\therefore \overline{IV}$  ينصف  $\triangle AIC$

في  $\triangle ABC$ :  $\therefore \overline{AI}$  متوسط

من (١)، (٢)، (٣)  $\frac{IS}{SB} = \frac{IV}{VC}$

$$(١) \quad \frac{IS}{SB} = \frac{AI}{IB}$$

$$(٢) \quad \frac{IV}{VC} = \frac{AI}{IC}$$

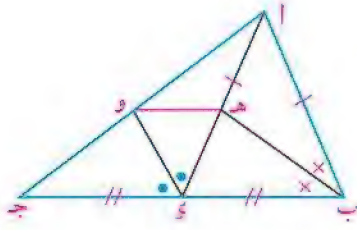
$$(٣) \quad IB = IC$$

ويكون  $\overline{SV} \parallel \overline{BC}$ .

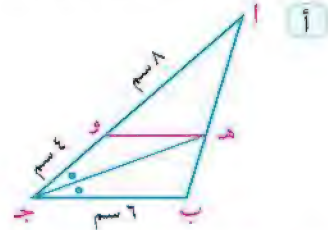


### حاول أن تحل

٦ في كل من الأشكال التالية أثبت أن:  $\overline{هـ و} // \overline{ب ج}$



ب



أ

### تفكير منطقي

في الشكل المقابل:  $و \in \overline{ب ج}$ .

كيف يمكن رسم  $\overline{ج هـ}$  يقطع  $\overline{ب أ}$  في هـ لحساب النسبة  $\frac{ب و}{و ج}$ ؟

إذا كان  $\frac{ب و}{و ج} = \frac{ب أ}{أ ج}$  ماذا نستنتج؟

### حالات خاصة

١- في  $\triangle أ ب ج$ :

إذا كان  $و \in \overline{ب ج}$ ، حيث  $\frac{ب و}{و ج} = \frac{ب أ}{أ ج}$

فإن:  $\overline{أ و}$  ينصف  $\angle أ ب ج$

وإذا كان  $هـ \in \overline{ب ج}$ ،  $هـ \neq و$ ، حيث  $\frac{ب هـ}{هـ ج} = \frac{ب أ}{أ ج}$

فإن:  $\overline{أ هـ}$  ينصف  $\angle أ$  الخارجة عن المثلث  $أ ب ج$

ويعرف هذا بعكس النظرية السابقة.

٢- في الشكل المقابل:

$\overline{ب هـ}$ ،  $\overline{ج هـ}$  منصف زاويتا  $ب$ ،  $ج$

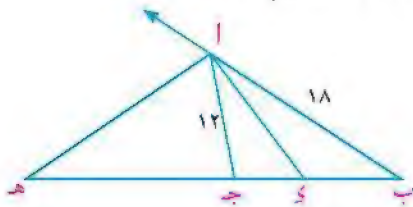
يتقاطعا في نقطة  $هـ \in \overline{أ و}$ . ماذا تستنتج؟

حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

### مثال

٦ أ ب ج مثلث فيه  $أ ب = ١٨$  سم،  $ب ج = ١٥$  سم،  $أ ج = ١٢$  سم،  $و \in \overline{ب ج}$ ، حيث  $ب و = ٩$  سم. رسم  $\overline{أ هـ} \perp \overline{أ و}$  فقطع  $\overline{ب ج}$  في هـ. أثبت أن  $\overline{أ و}$  ينصف  $\angle أ$  ثم أوجد طول  $\overline{ج هـ}$ .

### الحل



في  $\triangle أ ب ج$ :  $\frac{أ ب}{ب ج} = \frac{١٨}{١٥} = \frac{٣}{٥}$

$ج و = ب ج - ب و = ١٥ - ٩ = ٦$  سم

$\therefore \frac{ب و}{و ج} = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{ب و}{و ج} = \frac{ب أ}{أ ج}$

$\overline{أ و}$  ينصف  $\angle أ ب ج$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{أه} \perp \overline{آي} \text{ ويقطع } \overline{بج} \text{ في } ه \\ \therefore \overline{أه} \text{ ينصف } \triangle \text{ الخارجة عن } \triangle أبج \\ \therefore \overline{بج} = \overline{بج} + \overline{جھ} \quad \therefore \frac{18}{12} = \frac{15 + \overline{جھ}}{\overline{جھ}} \\ \text{ويكون } \frac{\overline{بج}}{\overline{أج}} = \frac{\overline{بھ}}{\overline{هـج}} \quad \overline{جھ} = 30 \text{ سم} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٧) أب ج د شكل رباعي فيه أب = ١٨ سم، ب ج = ١٢ سم. هـ  $\in$  آي بحيث ٢ أه = ٣ هـ د رسم هـ و // د ج فقطع آج في و. أثبت أن ب و ينصف  $\triangle أبج$ .

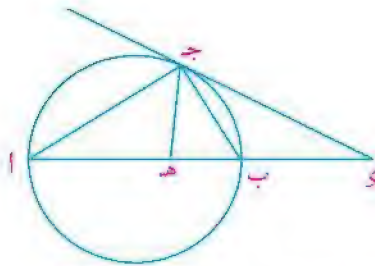
مثال

٧) أب قطر في دائرة، آج وتر فيها. رسم ج د مماس للدائرة عند ج فقطع أب في د.

إذا كانت هـ  $\in$  أب بحيث  $\frac{\overline{بج}}{\overline{بھ}} = \frac{\overline{كج}}{\overline{جھ}}$  أثبت أن:

أ) آج ينصف الزاوية الخارجة للمثلث ج د هـ عند ج. ب)  $\frac{\overline{أه}}{\overline{بھ}} = \frac{\overline{آد}}{\overline{بج}}$

الحل



(١)

$$\therefore \frac{\overline{بج}}{\overline{بھ}} = \frac{\overline{كج}}{\overline{جھ}}$$

$\therefore \overline{جب}$  ينصف  $\triangle ج د هـ$  في د ج هـ.

$\therefore$  أب قطر في الدائرة

$\therefore \angle (أج ب) = 90^\circ$  ويكون ج أ  $\perp$  ج ب

$\therefore \overline{جب}$  ينصف  $\triangle ج د هـ$  في د ج هـ

$\therefore$  ج أ منصف للزاوية الخارجة عند ج

$$\text{ويكون } \frac{\overline{كج}}{\overline{جھ}} = \frac{\overline{آد}}{\overline{أه}}$$

من (١)، (٢)

$$\text{ينتج أن: } \frac{\overline{بج}}{\overline{بھ}} = \frac{\overline{آد}}{\overline{أه}} \quad \therefore \frac{\overline{أه}}{\overline{بھ}} = \frac{\overline{آد}}{\overline{بج}}$$

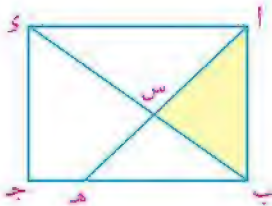
(وهو المطلوب ثانيًا)

(منصفا الزاوية متعامدان) (وهو المطلوب أولًا)

حاول أن تحل

٨) دائرتان م، ن متمستان من الخارج في أ. رسم مستقيم يوازي م ن فقطع الدائرة م في ب، ج، والدائرة ن في د، هـ على الترتيب. فإذا تقاطع  $\overline{بم}$ ،  $\overline{هـ ن}$  في النقطة و. أثبت أن أ و ينصف  $\triangle م و ن$ .

تحقق من فهمك



حل مشكلات: بين الشكل المقابل تقسيمًا لقطعة أرض مستطيلة الشكل

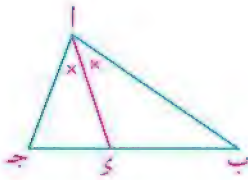
إلى أربعة أقسام مختلفة بالمستقيمين  $\overline{أه}$ ،  $\overline{آه}$ ، حيث هـ  $\in$   $\overline{بج}$ ،  $\overline{ب و} \cap \overline{أه} = \{س\}$ .

فإذا كان أب = ب هـ = ٤٢ مترًا، آي = ٥٦ مترًا.

احسب مساحة القطعة أب س بالأمتار المربعة وطول آس



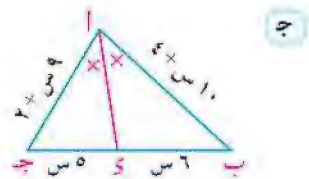
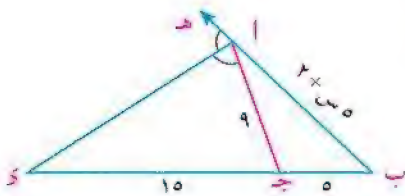
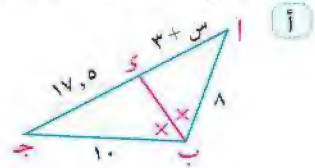
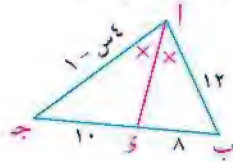
## تمارين ٢ - ٣



١ في الشكل المقابل:  $\overleftrightarrow{AD}$  ينصف  $\triangle ABC$ . أكمل:

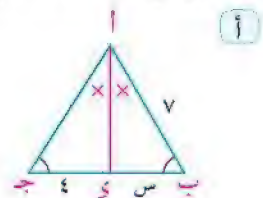
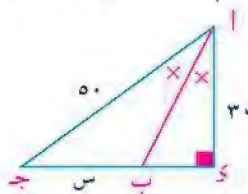
أ  $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$    
 ب  $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$    
 ج  $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$    
 د  $AB \times DC = AC \times AD$

٢ في كل من الأشكال التالية، أوجد قيمة س (الأطوال مقدرة بالسنتيمترات)



٣ ا ب ج مثلث محيطه ٢٧ سم، رسم  $\overleftrightarrow{AD}$  ينصف  $\triangle ABC$  ويقطع  $\overline{BC}$  في  $D$ . إذا كان  $AD = 4$  سم،  $DC = 5$  سم، أوجد طول كل من  $AB$ ،  $AC$ ،  $BC$ .

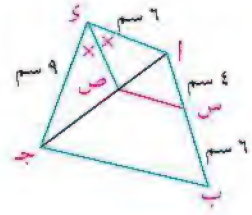
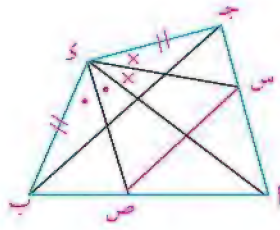
٤ في كل من الأشكال التالية أوجد قيمة س، ثم أوجد محيط  $\triangle ABC$ .



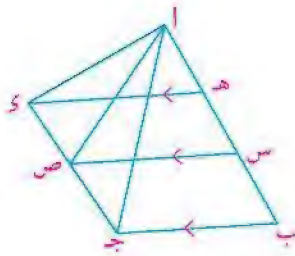
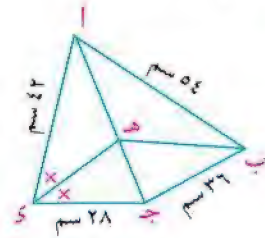
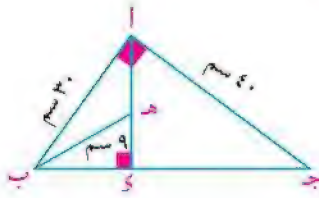
٥ ا ب ج مثلث فيه  $AB = 8$  سم،  $AC = 4$  سم،  $BC = 6$  سم، رسم  $\overleftrightarrow{AD}$  ينصف  $\triangle ABC$  ويقطع  $\overline{BC}$  في  $D$ ، ورسم  $\overleftrightarrow{AH}$  ينصف  $\triangle ABC$  الخارجة ويقطع  $\overline{BC}$  في  $H$ . أوجد طول كل من  $AD$ ،  $AH$ .



٦ في كل من الأشكال التالية: أثبت أن  $\overline{سص} // \overline{بج}$



٧ في كل من الأشكال التالية، أثبت أن  $\overline{بـه}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$ .

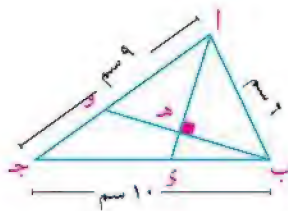


٨ في الشكل المقابل:  $\overline{هـو} // \overline{سص} // \overline{بج}$ ،

$$أ ب \times س = أ ج \times هـ س.$$

أثبت أن  $\overline{أص}$  ينصف  $\triangle جـ أ ب$ .

٩ أ ب ج مثلث  $\exists \overline{بـج}$ ،  $س$   $\overline{بـج}$  حيث  $جـ س = أ ب$ . رسم  $\overline{جـهـ} // \overline{أ ب}$  ويقطع  $\overline{أ ب}$  في هـ، ورسم  $\overline{هـو} // \overline{بـج}$  ويقطع  $\overline{أ ج}$  في و أثبت أن  $\overline{بـو}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$



١٠ في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث فيه أ ب = ٦ سم، أ ج = ٩ سم،

$$ب ج = ١٠ سم. \exists \overline{بـج} \text{ بحيث } ب س = ٤ سم.$$

رسم  $\overline{بـه} \perp \overline{أ ب}$  ويقطع  $\overline{أ ب}$  في هـ، وعلى الترتيب،

أثبت أن  $\overline{أ و}$  ينصف  $\triangle أ ب ج$ .

ب أوجد م ( $\triangle أ ب و$ ): م ( $\triangle ج ب و$ )

## تطبيقات التناسب في الدائرة

### Applications of Proportionality in the Circle

٣ - ٣

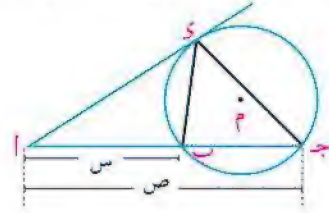
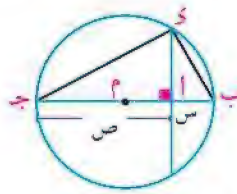
#### سوف نتعلم

- إيجاد قوة نقطة بالنسبة لدائرة.
- تحديد موقع نقطة بالنسبة لدائرة.
- إيجاد قياسات الزوايا الناتجة من تقاطع الأوتار والمماسات في الدائرة.
- تمذجة وحل تطبيقات تشمل إيجاد طول المنصف الداخلي والخارجي لزاوية.



كيف يمكن إنشاء قطعة مستقيمة يكون طولها  $l$  وسطًا متناسبًا بين طولين  $s$ ،  $v$  لقطعتين معلومتين؟

في كل من الشكلين التاليين  $اب = س$  ،  $اج = ص$  ،  $أى = ل$



∴  $\triangle اى ب \sim \triangle اى جى$  (لماذا؟)  $\therefore \frac{اى}{اج} = \frac{اب}{اى}$

ويكون  $\frac{ل}{ص} = \frac{س}{ل}$  ،  $ل^2 = س \times ص$  أي أن  $ل$  وسط متناسب بين  $س$ ،  $ص$

#### المصطلحات الأساسية

Power of a point	قوة نقطة
Circle	دائرة
Chord	وتر
Tangent	مماس
Secant	قاطع
Diameter	قطر

دوائر متحدة المركز

Concentric Circles

مماس خارجي مشترك

Common External Tangent

مماس داخلي مشترك

Common Internal Tangent

#### الأدوات والوسائل

- أدوات هندسية للرسم والقياس

#### عمل تعاوني

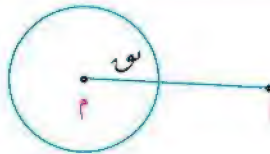
أنشئ قطعًا مستقيمة أطوالها  $٣\sqrt{٢}$ ،  $١٥\sqrt{٢}$ ،  $٢٤\sqrt{٢}$

قارن رسمك مع زملائك وتحقق من صحة إجابتك مستخدمًا الآلة الحاسبة والقياس.

#### Power of a point

#### أولاً: قوة نقطة بالنسبة لدائرة

**تعريف** قوة النقطة  $أ$  بالنسبة للدائرة  $م$  التي طول نصف قطرها هو العدد الحقيقي  $وم$  ( $أ$ ) حيث:  $وم(أ) = (أ م)^2 - ر^2$



#### ملاحظات هامة

##### ملاحظة ١

- يمكن التنبؤ بموقع نقطة  $أ$  بالنسبة للدائرة  $م$  إذا كان:  $وم(أ) < ٠$  فإن  $أ$  تقع خارج الدائرة.  
 $وم(أ) = ٠$  فإن  $أ$  تقع على الدائرة.  
 $وم(أ) > ٠$  فإن  $أ$  تقع داخل الدائرة.

### مثال

١ حدّد موقع كلّ من النقط أ، ب، ج بالنسبة للدائرة م التي طول نصف قطرها ٥ سم إذا كان:  
 وم (أ) = ١١ ، وم (ب) = صفر ، وم (ج) = ١٦ ، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{وم (أ)} &= ١١ < ٥ \therefore \text{أ تقع خارج الدائرة} \\ \therefore \text{وم (أ)} &= (أ) - ٢ \text{وم} = ١١ - ٢ = ٩ \\ \therefore \text{وم (ب)} &= \text{صفر} \therefore \text{ب تقع على الدائرة} \\ \therefore \text{وم (ج)} &= ١٦ > ٥ \therefore \text{ج تقع داخل الدائرة} \\ \therefore \text{وم (ج)} &= (ج) - ٢ \text{وم} = ١٦ - ٢ = ١٤ \end{aligned}$$

$$\therefore \text{أ.م} = ٦ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ب.م} = ٥ \text{ سم}$$

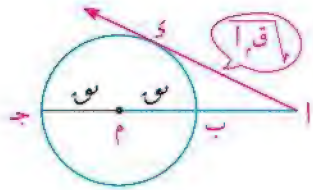
$$\therefore \text{ج.م} = ٣ \text{ سم}$$

### حاول أن تحل

١ حدّد موقع كلّ من النقط أ، ب، ج بالنسبة للدائرة ن التي طول نصف قطرها ٣ سم، ثم احسب بعد كل نقطة عن مركز الدائرة في كل من الحالات الآتية:

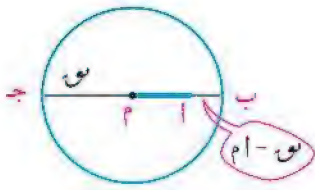
$$\text{أ. وم (أ)} = ١٥ \quad \text{ب. وم (ب)} = \text{صفر} \quad \text{ج. وم (ج)} = ٤$$

### ملاحظة ٢



$$\begin{aligned} \text{إذا وقعت النقطة أ خارج الدائرة م فإن: وم (أ)} &= (أ) - ٢ \text{وم} \\ (أ) - ٢ \text{وم} &= (أ) - ٢ \text{وم} \\ (أ) - ٢ \text{وم} &= (أ) - ٢ \text{وم} \\ \therefore \text{طول المماس المرسوم من النقطة أ للدائرة م} &= \sqrt{(أ) - ٢ \text{وم}} \end{aligned}$$

### ملاحظة ٣

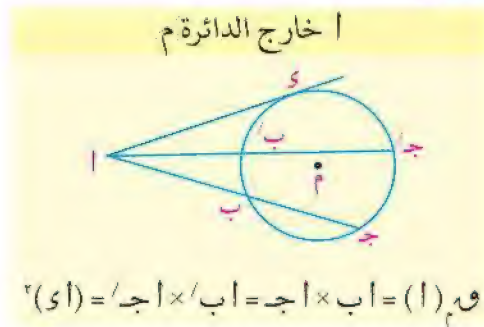


$$\begin{aligned} \text{إذا وقعت النقطة أ داخل الدائرة م فإن: وم (أ)} &= (أ) - ٢ \text{وم} \\ (أ) - ٢ \text{وم} &= (أ) - ٢ \text{وم} \\ (أ) - ٢ \text{وم} &= (أ) - ٢ \text{وم} \\ \therefore \text{طول المماس المرسوم من النقطة أ للدائرة م} &= \sqrt{(أ) - ٢ \text{وم}} \end{aligned}$$

### وبصفة عامة



$$\text{وم (أ)} = (أ) - ٢ \text{وم} = (أ) - ٢ \text{وم}$$



$$\text{وم (أ)} = (أ) - ٢ \text{وم} = (أ) - ٢ \text{وم}$$



## مثال

٢ الدائرة م طول نصف قطرها ٣١ سم. النقطة أ تبعد عن مركزها ٢٣ سم، رسم الوتر ب ج حيث  $\exists \text{ أ } \perp \text{ ب ج }$ ،

أ ب = ٣ أ ج احسب:

أ طول الوتر ب ج

ب بعد الوتر ب ج عن مركز الدائرة.

## الحل

في الدائرة م:

أ ب = ٣، أ ج = ٣١ سم، أ م = ٢٣ سم،  $\exists \text{ أ } \perp \text{ ب ج }$ ،  $\therefore$  أ تقع داخل الدائرة ويكون

$$\text{و.م (أ)} = (\text{أ م})^2 - (\text{أ ب})^2 = 31^2 - 3^2$$

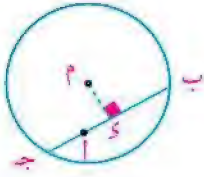
$$\therefore \text{أ ج} = 12 \text{ سم} \quad \therefore \text{أ ج} \times \text{أ ج} = 31^2 - 3^2$$

$$\therefore \text{طول الوتر ب ج} = 4 \times 12 = 48 \text{ سم}$$

ب بفرض أن بعد الوتر عن مركز الدائرة = م ي حيث  $\text{م ي} \perp \text{ب ج}$

$\therefore \text{م ي} \perp \text{ب ج}$ ،  $\therefore$  م ي منتصف ب ج ويكون ب ي = ٢٤ سم

$$\therefore (\text{م ي})^2 = 31^2 - 24^2 = 385 \quad \therefore \text{م ي} = \sqrt{385} \approx 19,6 \text{ سم}$$



## حاول أن تحل

٢ الدائرة ن طول نصف قطرها ٨ سم. النقطة ب تبعد ١٢ سم عن مركز الدائرة، رسم مستقيم يمر بالنقطة ب

ويقطع الدائرة في نقطتين ج، د، حيث ج ب = ج د، احسب طول الوتر ج د وبعده عن النقطة ن.

## مثال

٣ دائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب، ج  $\exists \text{ أ } \perp \text{ ب ج}$ ، رسم ج د فقطع الدائرة م في ي، هـ حيث

ج د = ٩ سم، ي هـ = ٧ سم، ورسم ج و يمس الدائرة ن عند و.

أ أثبت أن و.م (ج) = و.ن (ج). ب إذا كان أ ب = ١٠ سم. أوجد طول كل من أ ج، ج و.

## الحل

أ ج د تقع خارج الدائرة م، ج هـ، ج ب قاطعان للدائرة م.

$$\therefore \text{و.م (ج)} = (\text{ج د})^2 = (\text{ج هـ}) \times (\text{ج ب}) \quad (١)$$

ج د تقع خارج الدائرة ن، ج ب قاطع، ج و مماس لها.

$$\therefore \text{و.ن (ج)} = (\text{ج د})^2 = (\text{ج ب}) \times (\text{ج و}) \quad (٢)$$

$$\text{من (١)، (٢)} \quad \therefore \text{و.م (ج)} = (\text{ج د})^2 = (\text{ج ب}) \times (\text{ج و}) = 16 \times 9 = 144$$

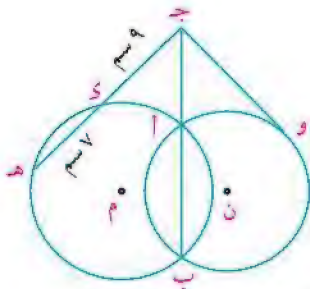
ب  $\therefore \text{أ ب} = 10 \text{ سم}$ ،  $\therefore \text{و.ن (ج)} = (\text{ج د})^2 = (\text{ج أ} + \text{أ ب}) \times (\text{ج و}) = 144$

$$\therefore \text{ج أ} = 8 \text{ سم}$$

$$\therefore (\text{ج أ})^2 + 10^2 = 144$$

$$\therefore \text{ج و} = 12 \text{ سم}$$

$$\therefore (\text{ج و})^2 = 144$$



## ملاحظة هامة

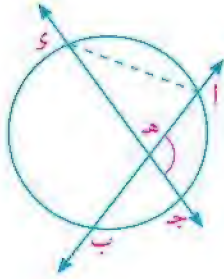
تسمى مجموعة النقاط التي لها نفس القوة بالنسبة لدائرتين مختلفتين بالمحور الأساسي للدائرتين.  
**فإذا كان**  $و_م(أ) = و_ن(أ)$  **فإن** أ تقع على المحور الأساسي للدائرتين م، ن.  
 في المثال السابق لاحظ أن:  $و_م(ج) = و_ن(ج)$  ،  $و_م(أ) = و_ن(أ)$  = صفراً ،  $و_م(ب) = و_ن(ب)$  = صفراً  
 ∴  $\overleftrightarrow{أب}$  محور أساسي للدائرتين م، ن.

## حاول أن تحل

- ٣ الدائرتان م، ن متمستان من الخارج في أ،  $\overleftrightarrow{أب}$  مماس مشترك للدائرتين م، ن،  $\overleftrightarrow{بج}$  يقطع الدائرة م في ج،  $\overleftrightarrow{ب هـ}$  يقطع الدائرة ن في هـ، و على الترتيب.  
 أ أثبت أن:  $\overleftrightarrow{أب}$  محور أساسي للدائرتين م، ن  
 ب إذا كان  $و_م(ب) = ٣٦$  ،  $ب ج = ٤$  سم ،  $هـ و = ٩$  سم. أوجد طول كل من  $\overleftrightarrow{ج د}$  ،  $\overleftrightarrow{أ ب}$  ،  $\overleftrightarrow{ب هـ}$ .

## ثانياً: القاطع والمماس وقياسات الزوايا

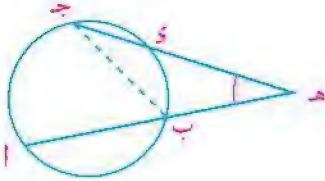
سبق ودرست:



- ١- إذا تقاطعت قاطعتان داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوس المقابل لهذه الزاوية والقوس المقابل للزاوية التي تقابلها بالرأس.

في الشكل المقابل:  $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{ج د} = {هـ}$

فإن:  $و(أ هـ ج) = \frac{1}{2} [و(أ ج) + و(ب د)]$



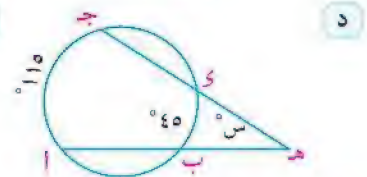
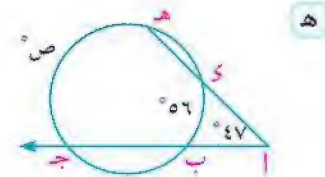
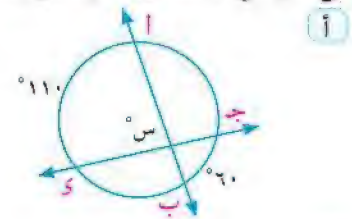
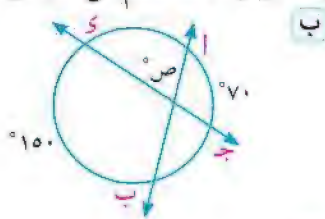
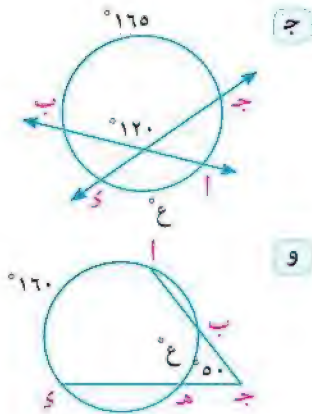
- ٢- إذا تقاطعت قاطعتان خارج دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف الفرق الموجب بين قياسى القوسين المقابلين لها.

في الشكل المقابل:  $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{ج د} = {هـ}$

فإن:  $و(أ هـ ج) = \frac{1}{2} [و(أ ج) - و(ب د)]$

## حاول أن تحل

- ٤ في كل من الأشكال الآتية: أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



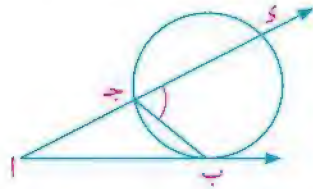
## استنتاج قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماس (أو مماسين) لدائرة.

تمرين مشهور

القاطع والمماس (أو المماسان) لدائرة المتقاطعان خارج الدائرة، يكون قياس زاوية تقاطعهما مساويًا نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

## البرهان

الحالة الأولى: تقاطع القاطع والمماس لدائرة.

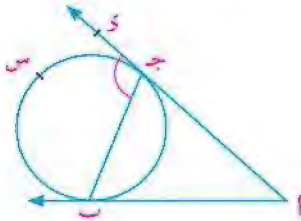

 $\therefore \angle I$  ج ب خارجة عن  $\Delta$  أ ب ج

$$\therefore \angle I = \angle (A) - \angle (B \text{ ج } I) = \angle (A) - \angle (B \text{ ج } I)$$

$$\frac{1}{2} \angle (B \text{ ج } I) - \frac{1}{2} \angle (B \text{ ج } I) =$$

$$\frac{1}{2} [\angle (B \text{ ج } I) - \angle (B \text{ ج } I)] =$$

الحالة الثانية: تقاطع مماسين لدائرة.


 $\therefore \angle I$  ج ب خارجة عن  $\Delta$  أ ب ج

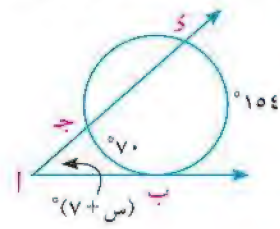
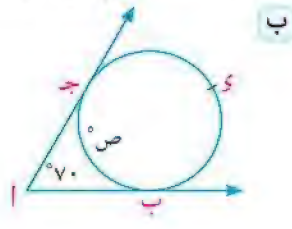
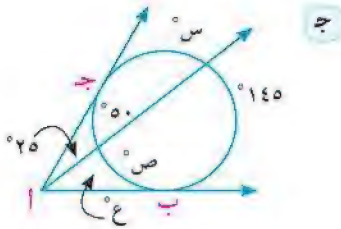
$$\therefore \angle I = \angle (A) - \angle (B \text{ ج } I) = \angle (A) - \angle (B \text{ ج } I)$$

$$\frac{1}{2} \angle (B \text{ ج } I) - \frac{1}{2} \angle (B \text{ ج } I) =$$

$$\frac{1}{2} [\angle (B \text{ ج } I) - \angle (B \text{ ج } I)] =$$

## حاول أن تحل

٥ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



## مثال

٤ الربط بالأقمار الصناعية: يدور قمر صناعي في مدار، محافظًا في أثناء دورانه على ارتفاع ثابت فوق

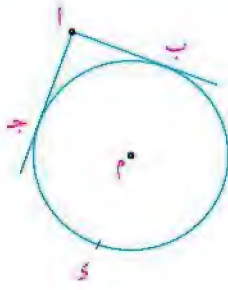
منطقة خط الاستواء، وتستطيع آلة التصوير به رصد قوس طوله ٦٠١١ كم على سطح الأرض. إذا كان قياس هذا القوس ٥٤°. فأوجد:

أ قياس زاوية آلة التصوير الموضوعة على القمر الصناعي.

ب طول نصف قطر الأرض عند دائرة خط الاستواء.



## الحل



نمذجة المشكلة: باعتبار الدائرة م هي دائرة خط الاستواء يكون  
و (ب ج) = 54°، وطول ب ج = 6.11 كم.

أ) قياس الدائرة = 360°

و (ب ج) = 54° - 360° = 30.6°

ويكون و (أ ب) = 1/4 = (ب ج) - و (ب ج) = 1/4

$$126^\circ = (54^\circ - 30.6^\circ) \times \frac{1}{4}$$

ب) في الدائرة يتناسب طول القوس مع قياسه

$$\frac{54^\circ}{360^\circ} = \frac{6.11}{\text{م} \times \pi \times 2}$$

$$\therefore \text{م} = 6377.87$$

∴ طول نصف قطر الأرض عند خط الاستواء ≈ 6378 كم.

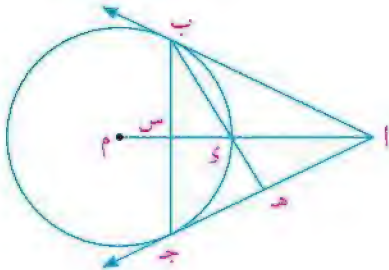
### تذكر

طول القوس = قياس القوس  
محيط دائرته = قياس الدائرة

## حاول أن تحل



٦) تدور بكرة عند محور م بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة عند أ.  
فإذا كان قياس الزاوية بين جزئي السير 40°. فأوجد طول ب ج  
الأكبر، علمًا بأن طول نصف قطر البكرة الكبرى 9 سم.

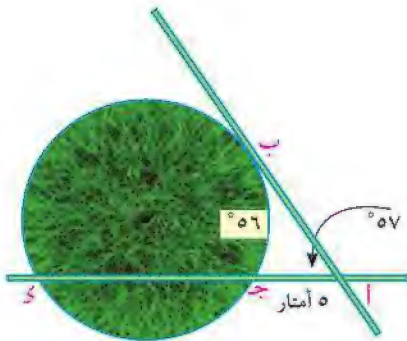


٧) في الشكل المقابل: دائرة م طول نصف قطرها 9 سم، أ ب، أ ج  
مماسان للدائرة عند ب، ج. أ م يقطع الدائرة في د، ب ج في س  
رسم ب و فقطع أ ج في هـ. إذا كان و م (أ) = 144° أوجد:

أ) طول أ ب

ب) طول أ س.

## تحقق من فهمك



حل مشكلات: يبين الشكل المقابل مخططاً لحديقة على شكل  
دائرة. أنشئ ممرين للمشاة أحدهما خارج الحديقة يمسها في النقطة  
ب والآخر يقطع الحديقة في نقطتي ج، د ويتقاطع الممران عند أ.  
إذا كان و م (أ) = 100°، أ ج = 5 أمتار.  
أوجد طول كل من أ ب، أ ج، ثم أوجد و (ب د).

### تمارين ٣ - ٣

- ١ حدد موقع كل من النقط التالية بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها ١٠ سم، ثم احسب بُعد كل نقطة عن مركز الدائرة.
- أ) م (أ) = ٣٦ م (ب) = ٩٦ م (ج) = صفر

- ٢ أوجد قوة النقطة المعطاة بالنسبة إلى الدائرة م، والتي طول نصف قطرها م:

أ) النقطة أ حيث  $ام = ١٢$  سم ،  $نم = ٩$  سم

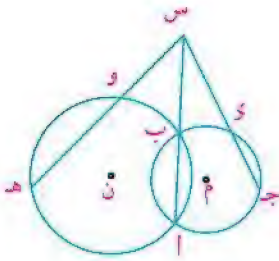
ب) النقطة ب حيث  $بم = ٨$  سم ،  $نم = ١٥$  سم

ج) النقطة ج حيث  $جم = ٧$  سم ،  $نم = ٧$  سم

د) النقطة د حيث  $دم = ١٧\frac{١}{٢}$  سم ،  $نم = ٤$  سم

- ٣ إذا كان بعد نقطة عن مركز دائرة يساوي ٢٥ سم وقوة هذه النقطة بالنسبة إلى الدائرة يساوي ٤٠٠. أوجد طول نصف قطر هذه الدائرة.

- ٤ الدائرة م طول نصف قطرها ٢٠ سم. أ نقطة تبعد عن مركز الدائرة مسافة ١٦ سم، رسم الوتر ب ج حيث  $ا \in ب ج$  ،  $اب = ٢$  ج. احسب طول الوتر ب ج.



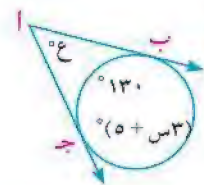
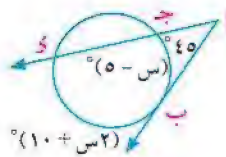
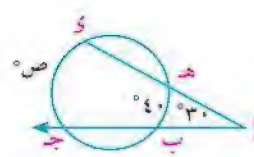
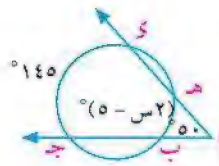
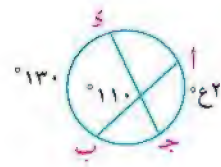
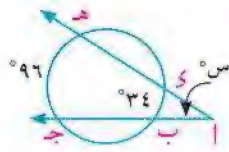
- ٥ في الشكل المقابل: الدائرتان م، ن متقاطعتان في أ، ب حيث  $\overleftrightarrow{اب} \cap \overleftrightarrow{ج د} = \overleftrightarrow{ه د} = \{س\}$ ،  $س د = ٢$  ج،  $ه د = ١٠$  سم، و  $ن (س) = ١٤٤$ .

أ) أثبت أن  $\overleftrightarrow{اب}$  محور أساسي للدائرتين م، ن.

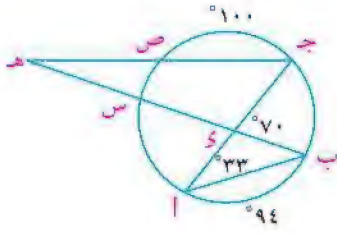
ب) أوجد طول كل من س ج، س و

ج) أثبت أن الشكل ج د و ه رباعي دائري.

٦ مستعيناً بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.

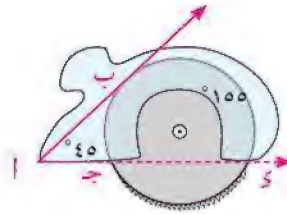




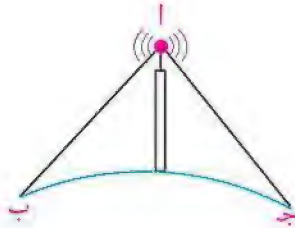


٧ في الشكل المقابل: و  $\angle \text{ب أ ج} = 33^\circ$ ، و  $\angle \text{ب س ج} = 70^\circ$ ،  
و  $\angle \text{أ ب} = 94^\circ$ ، و  $\text{ج ص} = 100^\circ$  أوجد قياس كل من:

- أ  $\text{س ص}$
- ب  $\text{أ س}$
- ج  $\angle \text{ب هـ ج}$



٨ الربط مع الصناعة: منشار دائري لقطع الخشب طول نصف قطر دائرته ١٠ سم. يدور داخل حافظة حماية، فإذا كان و  $\angle \text{ب أ س} = 45^\circ$ ، و  $\angle \text{ب س} = 155^\circ$  أوجد طول قوس قرص المنشار خارج حافظة الحماية.



٩ اتصالات: تتبع الإشارات التي تصدر عن برج الاتصالات في مسارها شعاعاً، نقطة بدايته على قمة البرج، ويكون مماساً لسطح الأرض، كما في الشكل المقابل. حدد قياس القوس المحصور بالمماسين بفرض أن البرج يقع على مستوى سطح البحر، و  $\angle \text{ج أ ب} = 80^\circ$

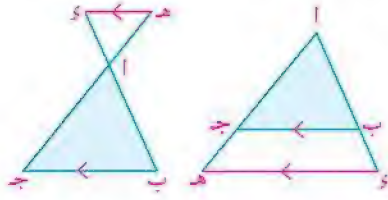
### @ معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:



## ملخص الوحدة

**نظرية ١:** إذا رسم مستقيم يوازي أحد أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع متناسبة.

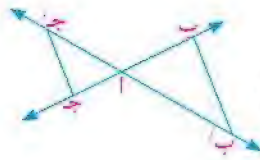


**نتيجة:** إذا رسم مستقيم خارج مثلث  $أ ب ج$  يوازي ضلعًا من أضلاع المثلث وليكن  $ب ج$  ويقطع  $أ ب$ ،  $أ ج$  في  $ي$ ،  $هـ$  على الترتيب (كما في الشكل)

$$\frac{ا ي}{ا ب} = \frac{ا هـ}{ا ج} \quad \text{فإن:} \quad \frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا ج}{ج هـ}$$

**عكس نظرية ١:** إذا قطع مستقيم ضلعين من أضلاع مثلث، وقسمهما إلى أطوالها متناسبة فإنه يوازي الضلع الثالث.

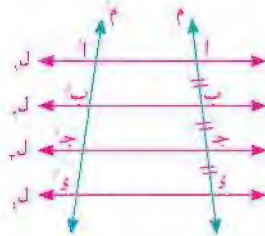
**نظرية تاليس العامة** Talis Theorem: إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية، فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.



**حالات خاصة**

**١-** إذا تقاطع المستقيمان  $م$ ،  $م'$  في النقطة  $أ$  وكان:  $ب ب' // ج ج'$ ، فإن:  $\frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ب'}{ا ج'}$

وبالعكس: إذا كان:  $\frac{ا ب}{ا ج} = \frac{ا ب'}{ا ج'}$  فإن:  $ب ب' // ج ج'$



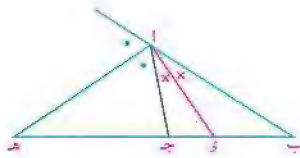
**٢-** إذا كان  $ل // ل' // ل''$ ، وكان:  $ا ب = ب ج = ج د$

وقطعها المستقيمان  $م$ ،  $م'$  وكان:  $ا ب = ب ج = ج د$

فإن:  $\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ا ب'}{ب ج'} = \frac{ا ب''}{ب ج''}$

**نظرية ٣ منصف زاوية مثلث** Triangle- Angle - Bisector: إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين

**ملاحظة هامة:** في الشكل المقابل



**١-**  $ب ج$  تنقسم من الداخل في  $ز$  ومن الخارج في  $هـ$  بنسبة واحدة

$$\frac{ب ج}{ج هـ} = \frac{ب ز}{ز ا}$$

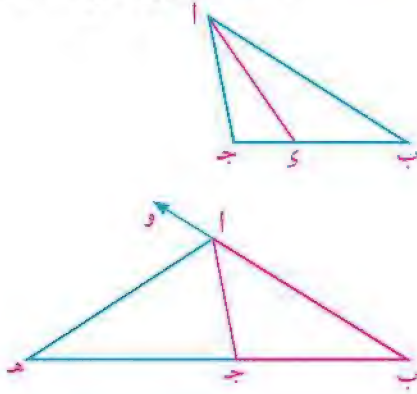
**٢-** المنصف الداخلي والمنصف الخارجي لزاوية في مثلث متعامدان: أي أن:  $أ هـ \perp أ ز$

**٣-** إذا كان  $ا ب < ا ج$ ، قطع منصف  $\Delta$  الضلع  $ب ج$  في  $ز$ ، حيث  $ب ز < ج ز$ ، أما منصف الزاوية الخارجة عند  $أ$  فيقطع  $ب ج$  في  $هـ$ ، حيث  $ب هـ < ج هـ$ .

$$ا ز = \sqrt{ا ب \times ا ج - ب ز \times ج ز}$$

$$ا هـ = \sqrt{ا ب \times ا ج - ب هـ \times ج هـ}$$

## ملخص الوحدة



حالات خاصة عكس نظرية (٣)

١- في  $\triangle ABC$  ج:

إذا كان  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$  حيث  $D$  على  $BC$  حيث  $\overline{AD}$  ينصف  $\angle A$  فإن:

وإذا كان  $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$  حيث  $D$  على  $BC$  حيث  $\overline{AD}$  ينصف  $\angle A$  فإن:

٢- حقيقة: منصفات زوايا المثلث تتقاطع في نقطة واحدة.

أولاً: قوة نقطة بالنسبة لدائرة Power of a point

قوة النقطة  $A$  بالنسبة للدائرة  $M$  التي طول نصف قطرها هو العدد الحقيقي  $r$  حيث:

$$P(A) = r^2 - OA^2$$

فإذا كان  $P(A) < 0$  فإن  $A$  تقع خارج الدائرة  $M$

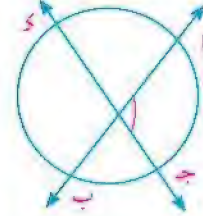
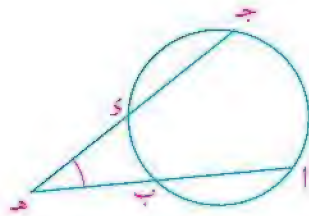
وإذا كان  $P(A) = 0$  فإن  $A$  تقع على الدائرة  $M$

وإذا كان  $P(A) > 0$  فإن  $A$  تقع داخل الدائرة  $M$

ثانياً: القاطع والمماس وقياسات الزاوية.

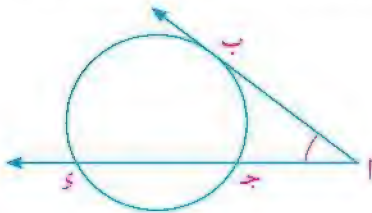
١- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطعين داخل دائرة:

داخل الدائرة (أ) خارج الدائرة (ب)



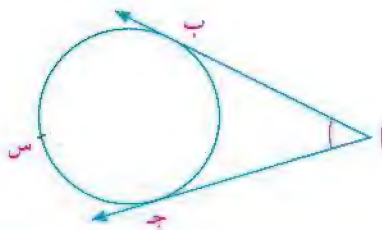
$$P(A) = \frac{1}{4} [(\overline{AC})^2 - (\overline{AB})^2] = \frac{1}{4} (\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2)$$

$$P(A) = \frac{1}{4} [(\overline{AC})^2 + (\overline{AB})^2] = \frac{1}{4} (\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2)$$



٢- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع قاطع ومماس للدائرة

$$P(A) = \frac{1}{4} [(\overline{AC})^2 - (\overline{AB})^2] = \frac{1}{4} (\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2)$$



٣- قياس الزاوية الناتجة من تقاطع مماسين لدائرة.

$$P(A) = \frac{1}{4} [(\overline{AC})^2 - (\overline{AB})^2] = \frac{1}{4} (\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2)$$



## الوحدة



# حساب المثلثات

## Trigonometry

### أهداف الوحدة

في نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- ✎ يتعرف الزاوية الموجهة.
- ✎ يتعرف الوضع القياسي للزاوية الموجهة.
- ✎ يتعرف القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- ✎ يتعرف نوع قياس الزوايا بالتقديرين (الستيني والدائري).
- ✎ يتعرف القياس الدائري للزوايا المركزية في دائرة.
- ✎ يستخدم الآلة الحاسبة في إجراء العمليات الحسابية الخاصة بالتحويل من القياس الدائري إلى القياس الستيني والعكس.
- ✎ يتعرف الدوال المثلثية.
- ✎ يحدد إشارات الدوال المثلثية في الأرباع الأربعة.
- ✎ يستنتج أن مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية.
- ✎ يتعرف النسب المثلثية للزاوية الحادة ولأي زاوية.
- ✎ يستنتج النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ✎ يتعرف الزوايا المنتسبة  $(\theta \pm 180^\circ)$ ,  $(\theta \pm 360^\circ)$ .
- ✎ يعطى الحل العام للمعادلات المثلثية على الصورة:  $\text{جا اس} = \text{جتا ب س}$   $\text{قا اس} = \text{قتا ب س}$
- ✎ يوجد قياس زاوية معلوم إحدى قيم النسب المثلثية لها.
- ✎ يتعرف التمثيل البياني لدوال الجيب وجيب التمام ويستنتج خواص كل منهما.
- ✎ يستخدم الآلة الحاسبة العلمية في حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- ✎ يمدج بعض الظواهر الفيزيائية والحياتية والتي تمثلها دوال مثلثية.
- ✎ يستخدم تكنولوجيا المعلومات في التعرف على التطبيقات المتعددة للمفاهيم الأساسية لحساب المثلثات.

### المصطلحات الأساسية

قياس ستيني Degree Measure	قياس موجب	دالة مثلثية	قاطع Secant
قياس دائري Radian Measure	Positive Measure	Trigonometric Function	ظل تمام Cotangent
زاوية موجهة Directed Angle	قياس سالب	جيب Sine	دالة دائرية Circular Function
زاوية نصف قطرية (راديان)	Negative Measure	جيب تمام Cosine	الزوايا المنتسبة Related Angles
Radian	زاوية مكافئة Equivalent Angle	ظل Tangent	
وضع قياسي Standard Position	زاوية ربعية Quadrant Angle	قاطع تمام Cosecant	

## دروس الوحدة

- الدرس (٤ - ١): الزاوية الموجهة.  
الدرس (٤ - ٢): القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.  
الدرس (٤ - ٣): الدوال المثلثية.  
الدرس (٤ - ٤): الزاوية المنتسبة.  
الدرس (٤ - ٥): التمثيل البياني للدوال المثلثية.  
الدرس (٤ - ٦): إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية.

## الأدوات المستخدمة

آلة حاسبة علمية - ورق مربعات - حاسب آلي -  
برامج رسم بياني.

## نبذة تاريخية

حساب المثلثات هو أحد فروع علم الرياضيات، فهو يختص بالحسابات الخاصة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه. وقد نشأ هذا العلم ضمن الرياضيات القديمة خصوصا فيما يتعلق بحسابات علم الفلك التي اهتم بها الإنسان القديم لما يتأمله ويشاهده في الكون من حركة الشمس والقمر والنجوم والكواكب.

ويعتد الرياضي العربي نصير الدين الطوسي هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك.

وكان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب، ويذكر أن اصطلاح (الظل) قد وصفه العالم العربي أبو الوفا البوزجاني (٩٤٠ - ٩٩٨م) في القرن العاشر الميلادي، وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام التي تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس في خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة في حساب المثلثات المستوي والكروي (نسبة إلى سطح الكرة) وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة، وأضافوا إليها أيضا الكثير. حتى أصبح حساب المثلثات متضمنا العديد من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته في شتى المعارف العلمية والعملية، وساهم في دفع عجلة التقدم والازدهار.

## مخطط تنظيمي للوحدة





# الزاوية الموجهة

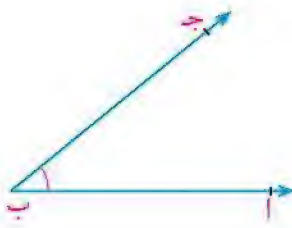
## Directed Angle

٤ - ١

### سوف تتعلم

- فهم الزاوية الموجهة.
- الوضع القياسي للزاوية الموجهة.
- القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة.
- موقع الزاوية الموجهة في المستوى الإحداثي المتعامد.
- مفهوم الزوايا المتكافئة.

### فكر q ناقش



سبق لك أن تعرفت على أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة.  
في الشكل المرسوم تسمى النقطة ب «رأس الزاوية»  
والشعاعان  $\vec{BA}$ ،  $\vec{CA}$  **ضلعاً الزاوية**.  
أي أن:  $\vec{BA} \cup \vec{CA} = \vec{BA} \cup \vec{CA}$  (ب ج)  
وتكتب كذلك  $\angle BAC$ .

### Degree Measure System

### القياس الستيني للزاوية

علمت أن القياس الستيني يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوية في الطول.  
وبالتالي فإن:

١- الزاوية المركزية التي ضلعاها يمران بنهايتي أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة (١°)

٢- تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءاً، كلٌّ منها يسمى دقيقة، وترمز له بالرمز (')

٣- تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءاً، كلٌّ منها يسمى ثانية، وترمز له بالرمز (')

أي أن:  $1^\circ = 60'$ ،  $1' = 60''$

### المصطلحات الأساسية

- قياس ستيني Degree Measure
- زاوية موجهة Directed angle
- وضع قياسي Standard Position
- قياس موجب Positive measure
- قياس سالب Negative measure
- زاوية متكافئة Equivalent Angle
- زاوية ربعية Quadrantal Angle

### تعلم

### Directed Angle

### الزاوية الموجهة



شكل (١)

إذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإنه يمكن كتابتهما على شكل الزوج المرتب  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  حيث  
العنصر الأول  $\vec{OA}$  هو الضلع الابتدائي للزاوية،  
العنصر الثاني  $\vec{OB}$  هو الضلع النهائي للزاوية التي رأسها نقطة و كما بالشكل (١).



شكل (٢)

أما إذا كان الضلع الابتدائي  $\vec{OB}$ ، الضلع النهائي  $\vec{OA}$   
فتكتب عندئذ  $(\vec{OB}, \vec{OA})$  كما في شكل (٢).

### الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.



**تعريف**  
الزاوية الموجهة هي زوج مرتب من شعاعين هما ضلعوا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية.

**تفكير ناقدي**

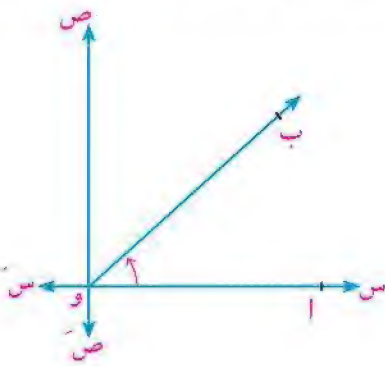
هل  $(\vec{OA}, \vec{OB}) = (\vec{OB}, \vec{OA})$ ؟ فسر إجابتك.

Standard position of the directed angle

**الوضع القياسي للزاوية الموجهة**

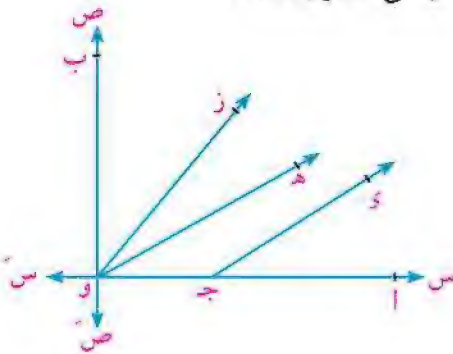
تكون الزاوية في وضع قياسي إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد، وضلعها الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

هل  $\angle AOB$  الموجهة في الوضع القياسي؟ فسر إجابتك.



**تعبير شفهي**

أي من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسي؟ فسر إجابتك.



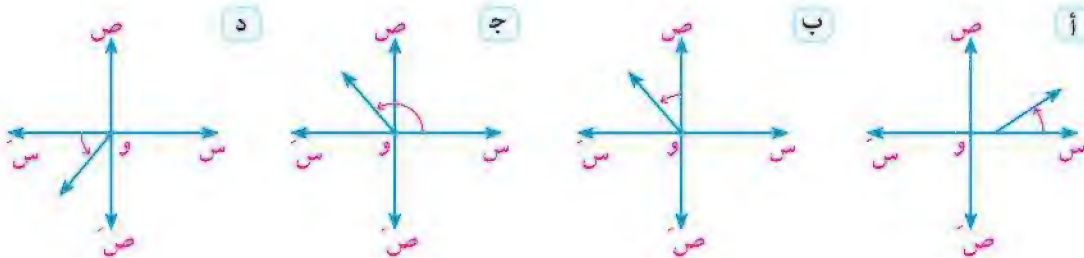
أ (جأ، جـ) ب (وأ، وهـ)

ج (وهـ، وأ) د (وأ، وز)

هـ (وب، وز) و (وأ، وب)

**حاول أن تحل**

أي الزوايا الموجهة التالية في وضعها القياسي؟ فسر إجابتك.



## القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة:

### Positive and negative measures of a directed angle

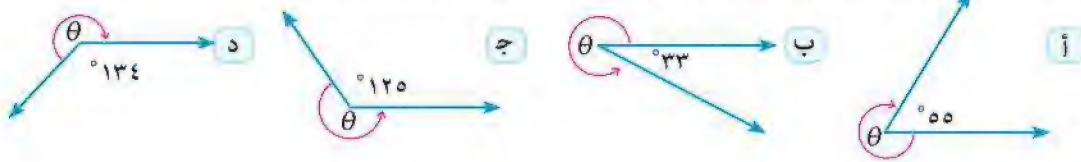
في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي  $\overrightarrow{OA}$  إلى الضلع النهائي  $\overrightarrow{OB}$  في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي  $\overrightarrow{OA}$  إلى الضلع النهائي  $\overrightarrow{OB}$  هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.



مثال

١ أوجد قياس الزاوية الموجهة  $\theta$  المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:



الحل

نعلم أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي  $360^\circ$

$$360^\circ = 33^\circ + \theta \quad \text{ب}$$

$$360^\circ = 55^\circ + \theta \quad \text{أ}$$

$$360^\circ = 134^\circ + \theta \quad \text{د}$$

$$360^\circ = 125^\circ + \theta \quad \text{ج}$$

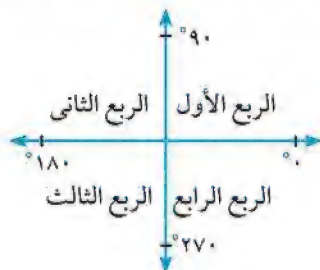
حاول أن تحل

٢ أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:

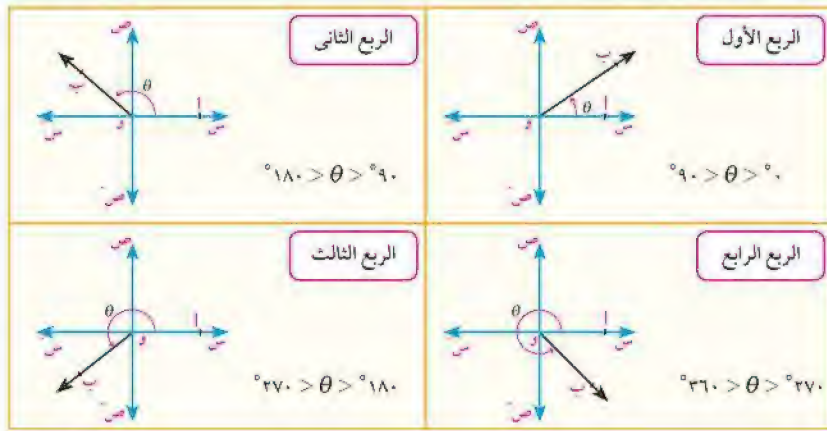


### موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد: Angle's position in the orthogonal coordinate plane

يُقسم المستوى الإحداثي المتعامد إلى أربعة أرباع كما في الشكل المقابل.



◀ إذا كانت  $\angle$  أ و ب الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو  $(\theta)$  فإن ضلعها النهائي  $\vec{OB}$  يمكن أن يقع في أحد الأرباع:



◀ إذا وقع الضلع النهائي  $\vec{OB}$  على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية في هذه الحالة **بالزاوية الربعية (Quadrantal angle)**، فتكون الزوايا التي قياساتها  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  هي زوايا ربعية.

### مثال

٢ عین الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالتالي:

- أ  $48^\circ$  ب  $217^\circ$  ج  $135^\circ$  د  $295^\circ$  هـ  $27^\circ$

### الحل

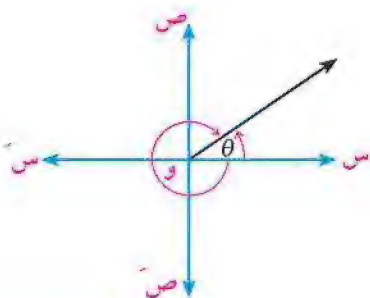
- أ  $90^\circ > 48^\circ > 0^\circ$  ب  $270^\circ > 217^\circ > 180^\circ$  ج  $180^\circ > 135^\circ > 90^\circ$  د  $360^\circ > 295^\circ > 270^\circ$  هـ  $27^\circ$  زاوية ربعية.
- فهى تقع فى الربع الأول.  
فهى تقع فى الربع الثالث.  
فهى تقع فى الربع الثانى.  
فهى تقع فى الربع الرابع.

### حاول أن تحل

٣ عین الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالتالي:

- أ  $88^\circ$  ب  $102^\circ$  ج  $180^\circ$  د  $300^\circ$  هـ  $196^\circ$

### ملاحظة:



- ◀ إذا كان  $(\theta)$  هو القياس الموجب لزاوية موجهة فإن القياس السالب لها يساوي  $(\theta - 360^\circ)$
- ◀ وإذا كان  $(-\theta)$  هو القياس السالب لزاوية موجهة فإن القياس الموجب لها يساوي  $(-\theta + 360^\circ)$



### مثال

٣ عین القیاس السالب لزاوية قیاسها  $275^\circ$ .

الحل

القیاس السالب للزاوية  $(275^\circ) = 360^\circ - 85^\circ =$

التحقیق:  $360^\circ = 85^\circ + 275^\circ = |85^\circ| + |275^\circ|$

حاول أن تحل

٤ عین القیاس السالب للزاويا التي قیاساتها كالآتی:

د  $315^\circ$

ج  $210^\circ$

ب  $270^\circ$

أ  $32^\circ$

### مثال

٤ عین القیاس الموجب للزاوية  $-235^\circ$

الحل

القیاس الموجب للزاوية  $(-235^\circ) = 360^\circ - 125^\circ =$

التحقیق:  $360^\circ = 125^\circ + 235^\circ = |125^\circ| + |235^\circ|$

حاول أن تحل

٥ عین القیاس الموجب لكل زاوية من الزوايا الآتیة:

د  $-320^\circ$

ج  $-90^\circ$

ب  $-126^\circ$

أ  $-52^\circ$

٦ [الربط بالألعاب الرياضية](#): یدور أحد لاعبی القرص بزاوية قیاسها  $150^\circ$  ارسم هذه الزاوية في الوضع القیاسی.

### Equivalent angles

### الزوايا المتكافئة

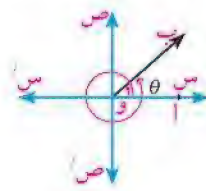
تأمل الأشكال الآتیة وحدد الزاوية الموجهة  $(\theta)$  في الوضع القیاسی لكل شكل. ماذا تلاحظ؟



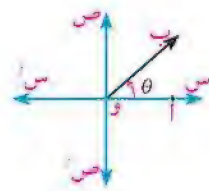
شكل (٤)



شكل (٣)



شكل (٢)



شكل (١)

في الأشكال (١)، (٢)، (٣)، (٤) نلاحظ أن الزاوية  $(\theta)$  والزاوية المرسومة معها لهما نفس الضلع النهائي و  $\overrightarrow{OB}$ .

شكل (١): الزاوية التي قیاسها  $\theta$  في الوضع القیاسی. شكل (٢): الزاويتان  $\theta$ ،  $\theta + 360^\circ$  متكافئتان.

شكل (٣): الزاويتان  $\theta$ ،  $\theta + 2 \times 360^\circ$  متكافئتان.

شكل (٤): الزاويتان  $\theta$ ،  $-(\theta - 360^\circ) = 360^\circ - \theta$  متكافئتان

مما سبق نستنتج أن:

عند رسم زاوية موجهة قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي فإن جميع الزوايا التي قياساتها:  
 $1 \pm \theta$  أو  $2 \pm \theta$  أو  $3 \pm \theta$  أو ..... أو  $n \pm \theta$  حيث  $n \in \mathbb{Z}$  صـ  
 يكون لها نفس الضلع النهائي، وتسمى **زوايا متكافئة**.

### مثال

٥ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركيتين في الضلع النهائي لكل من الزاويتين الآتيتين:

أ  $120^\circ$  ب  $230^\circ$

### الحل

أ زاوية بقياس موجب:  $120^\circ + 360^\circ = 480^\circ$  (بإضافة  $360^\circ$ )

زاوية بقياس سالب:  $120^\circ - 360^\circ = -240^\circ$  (بطرح  $360^\circ$ )

ب زاوية بقياس موجب:  $230^\circ + 360^\circ = 590^\circ$  (بإضافة  $360^\circ$ )

زاوية بقياس سالب:  $230^\circ - 360^\circ = -130^\circ$  (بطرح  $360^\circ$ )

**فكر:** هل توجد زوايا أخرى بقياس موجب، وأخرى بقياس سالب؟ اذكر بعض هذه الزوايا إن وجدت.

### حاول أن تحل

٧ أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركيتين في الضلع النهائي لكل من الزوايا الآتية:

أ  $40^\circ$  ب  $150^\circ$  ج  $125^\circ$  د  $240^\circ$  هـ  $180^\circ$

٨ **اكتشف الخطأ:** جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية  $75^\circ$  في الوضع القياسي ما عدا الإجابة:

أ  $285^\circ$  ب  $645^\circ$  ج  $285^\circ$  د  $435^\circ$

### تحقق من فهمك

١ عين الربع الذي تقع فيه كل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالاتي:

أ  $56^\circ$  ب  $325^\circ$  ج  $570^\circ$  د  $166^\circ$  هـ  $390^\circ$

٢ عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالاتي:

أ  $43^\circ$  ب  $214^\circ$  ج  $125^\circ$  د  $90^\circ$  هـ  $312^\circ$

٣ عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

أ  $56^\circ$  ب  $215^\circ$  ج  $495^\circ$  د  $930^\circ$  هـ  $450^\circ$



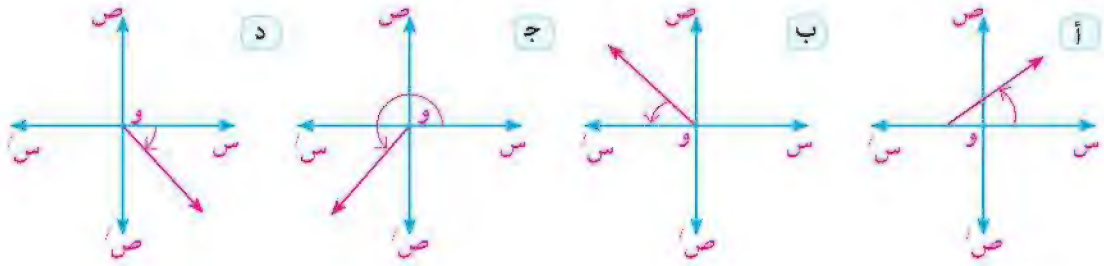
## تمارين ٤ - ١



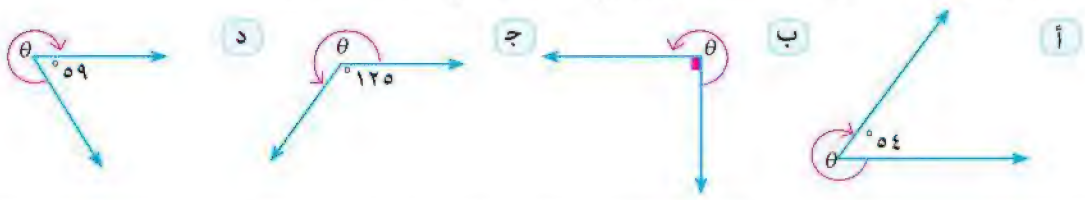
١ أكمل:

- أ تكون الزاوية الموجهة في وضع قياسى إذا كان .....  
 ب يقال للزاوية الموجهة في الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان .....  
 ج تكون الزاوية موجبة إذا كان دوران الزاوية ..... وتكون سالبة إذا كان دوران الزاوية .....  
 د إذا وقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات تسمى .....  
 هـ إذا كان  $\theta$  قياس زاوية موجهة في الوضع القياسى،  $\exists$  ص فإن  $(\theta + 360^\circ \times n)$  تسمى بالزوايا .....  
 و أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها  $530^\circ$  هو .....  
 ز الزاوية التى قياسها  $930^\circ$  تقع فى الربع .....  
 ح أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها  $690^\circ$  هو .....

٢ أي من الزوايا الموجهة الآتية فى الوضع القياسى



٣ أوجد قياس الزاوية الموجهة  $\theta$  المشار إليها فى كل شكل من الأشكال التالية:



٤ عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالاتى:

- أ  $24^\circ$       ب  $215^\circ$       ج  $-40^\circ$       د  $-220^\circ$       هـ  $640^\circ$



٥ ضع كلاً من الزوايا الآتية في الوضع القياسي، موضحاً ذلك بالرسم:

- أ ٣٢° ب ١٤٠° ج ٨٠° د ١١٠° هـ ٣١٥°

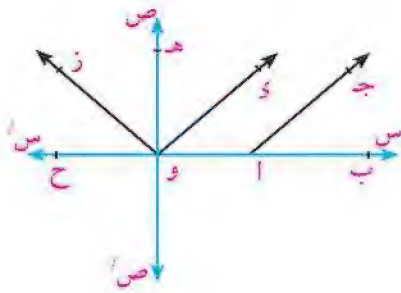
٦ عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا الآتية:

- أ ٨٣° ب ١٣٦° ج ٩٠°

- د ٢٦٤° هـ ٩٦٤° و ١٠٧٠°

٧ عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

- أ ١٨٣° ب ٢١٧° ج ٣١٥° د ٥٧٠°



٨ في الشكل المقابل: أيًا من الأزواج المرتبة الآتية تعبر

عن زاوية موجهة في وضعها القياسي؟ لماذا؟

- أ (وا، وى) ب (وز، وجـ)  
ج (اب، أجـ) د (وه، وى)  
هـ (وى، وز) و (وب، وز)

٩ يدور أحد لاعبي الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها ٢٠٠° ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي

١٠ **اكتشف الخطأ:** اكتب قياس أصغر زاوية بقياس موجب وزاوية أخرى بقياس سالب تشتركان مع الضلع النهائي للزاوية (-١٣٥°)

**إجابة زياد**

أصغر زاوية بقياس موجب =  $135^\circ + 360^\circ = 495^\circ$   
أصغر زاوية بقياس سالب =  $135^\circ - 360^\circ = -225^\circ$

**إجابة كريم**

أصغر زاوية بقياس موجب =  $135^\circ + 180^\circ = 315^\circ$   
أصغر زاوية بقياس سالب =  $135^\circ - 180^\circ = -45^\circ$

أى الإجابتين صحيح؟ فسر إجابتك.

## القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية

### Degree Measure and Radian Measure of an Angle

٢ - ٤

#### سوف تتعلم

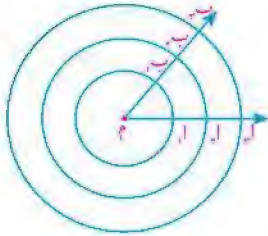
- فهم القياس الدائري للزاوية.
- العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري.
- كيفية إيجاد طول قوس في دائرة.

#### فكر q ناقش

سبق أن علمت أن القياس الستيني ينقسم إلى درجات ودقائق وثوان، وأن الدرجة الواحدة = 60 دقيقة، وأن الدقيقة الواحدة = 60 ثانية.  
هل توجد قياسات أخرى للزاوية؟

#### Radian Measure

#### القياس الدائري



#### عمل تعاوني

١- ارسم مجموعة من الدوائر المتحدة المركز كما في الشكل المقابل.

٢- أوجد النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة - ماذا تلاحظ؟

**نلاحظ أن** النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية، وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقدارًا ثابتًا.

$$\text{أي أن: } \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}} = \text{مقدار ثابت.}$$

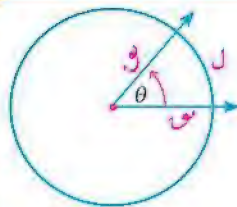
وهذا المقدار الثابت هو القياس الدائري للزاوية.  
القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة =  $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$  ويرمز لها بالرمز ( $\theta$ )

#### المصطلحات الأساسية

- قياس ستيني Degree Measure
- قياس دائري Radian Measure
- زاوية نصف قطرية Radian Angle

#### الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

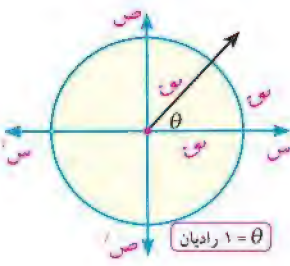


#### تعريف

إذا كان  $\theta$  هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها  $ر$  تقابل قوسًا من الدائرة طوله  $ل$  فإن:  $\theta = \frac{ل}{ر}$  من الزاوية نصف قطرية

$$\text{من التعريف نستنتج أن: } ل = \theta \times ر , ر = \frac{ل}{\theta}$$





ووحدة قياس الزاوية في القياس الدائري هي الزاوية النصف قطرية، ويرمز لها بالرمز (°) ويقرأ واحد دائري (راديان).

### الزاوية النصف قطرية Radian angle

هي الزاوية المركزية في الدائرة التي تحصر قوساً طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.

تعريف

**تفكير ناقد:** هل القياس الدائري لزاوية مركزية يتناسب مع طول القوس المقابل لها؟ فسر إجابتك.

### مثال

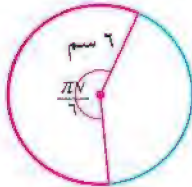
١١ دائرة طول نصف قطرها ٨ سم. أوجد لأقرب رقمين عشريين طول القوس إذا كان قياس الزاوية المركزية التي تقابله يساوي  $\frac{\pi}{12}$

الحل

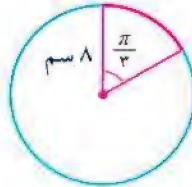
نستخدم صيغة طول القوس:  $ل = \theta \times ر$  ،  $\theta = \frac{\pi}{12}$  ،  $ر = ٨$  سم ، فيكون:  $ل = ٨ \times \frac{\pi}{12} = ٢.٠٩٤٧$  سم

### حاول أن تحل

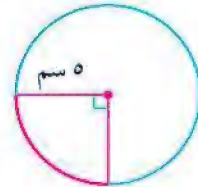
١ أوجد طول القوس الذي يحصر الزاوية المعلومة في كل من الدوائر الآتية مقرباً الناتج لأقرب جزء من عشرة.



أ



ب



ج

### العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية:

Relation between degree measure and radian measure of an angle

تعلم أن: قياس الزاوية المركزية لدائرة يساوي قياس قوسها.

أي أن: الزاوية المركزية التي قياسها الستيني ٣٦٠° يكون طول قوسها ٢π ر

### وفي دائرة الوحدة

فإن: ٢π (راديان) بالتقدير الدائري يكافئ ٣٦٠° بالتقدير الستيني.

أي أن: π (راديان) يكافئ ١٨٠° ، ١° (راديان) =  $\frac{180}{\pi} \approx ٥٧.٢٩٥$

إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري θ° وقياسها الستيني س فإن:

$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{س}{180}$$



توجد وحدة أخرى لقياس الزاوية وهي الجراد (Grad) وتساوي  $\frac{1}{٢٠٠}$  من قياس الزاوية المستقيمة. إذا كانت  $\theta$ ، ص هي قياسات ثلاث زوايا على التوالي بوحدات الدرجة، والراديان، والجراد فإن:

$$\frac{\theta_{\text{ص}}}{٢٠٠} = \frac{\theta}{\pi} = \frac{\theta}{١٨٠}$$

### مثال

١٢ حول  $٣٠^\circ$  إلى قياس دائري بدلالة  $\pi$ .

الحل

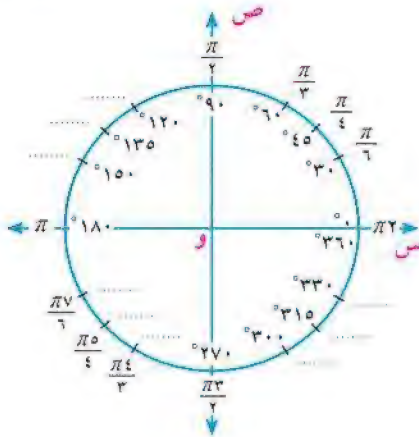
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{\theta_{\text{ص}}}{١٨٠}$$

للتحويل إلى راديان نستخدم الصورة

$$\frac{\pi}{٦} = \frac{\pi \times ٣٠}{١٨٠} = \theta$$

### حاول أن تحل

٢ الشكل المقابل يمثل قياسات بعض الزوايا الخاصة أحدها كُتب بالراديان (خارج الدائرة) والآخر كتب بالدرجات (داخل الدائرة). اكتب قياسات زوايا الشكل المقابلة أمام كل قياس زاوية مناظرة لها.



### مثال

١٣ حول قياس الزاوية  $١,٢^\circ$  إلى قياس ستيني.

الحل

$$\frac{١٨٠ \times ١,٢}{\pi} = \theta_{\text{س}}$$

$$\theta_{\text{س}} = ٦٨,٧٥٤٩٣٥٤٢ = ٦٨^\circ ٤٥'$$

وتستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالي:

ابدأ → 1 . 2 × 1 8 0 ÷ π = ° ' "

68° 45' 17.77"

### حاول أن تحل

٣ حول قياسات الزوايا التالية إلى قياس ستيني مقرباً الناتج لأقرب ثانية:

٥ -  $١٠,٠٥^\circ$

٣ -  $٢,٠٥^\circ$

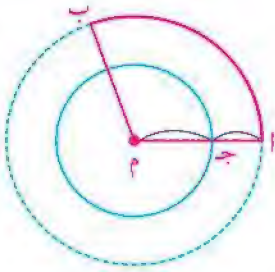
ب -  $١,٦^\circ$

أ -  $٠,٧^\circ$

### مثال

١٤ **الربط بالفضاء:** قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٣ ساعات، إذا كان طول نصف قطر الأرض يبلغ تقريباً ٦٤٠٠ كم وبعد القمر عن سطح الأرض ٣٦٠٠ كم. فأوجد المسافة التي يقطعها القمر خلال ساعة واحدة مقرباً الناتج لأقرب كيلومتر.





**الحل**

يبين الشكل المقابل المسار الدائري لحركة القمر:

∴ طول نصف قطر دائرة مسار القمر  $M = A = M + ج + ج + A$

∴  $M = 10000 = 3600 + 6400 = 10000$  كم

∴ القمر يقطع المسار الدائري (دورة كاملة) في 3 ساعات، وهذا يقابل زاوية مركزية  $\pi/2$

∴ القمر يقطع قوسًا طوله  $\frac{1}{3}$  محيط الدائرة في الساعة الواحدة، وهذا يقابل زاوية مركزية  $\frac{\pi/2}{3}$

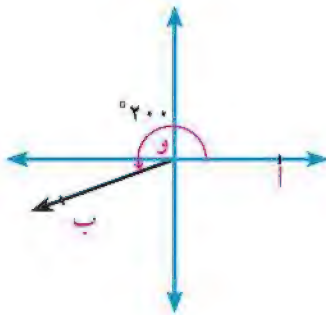
نستخدم صيغة طول القوس:  $l = \theta \times r$

بالتعويض عن  $r = 10000$  كم،  $\theta = \frac{\pi/2}{3}$ :  $l = 10000 \times \frac{\pi/2}{3}$

$l \approx 20944$  كم

**١٥ ألعاب رياضية:** يدور أحد لاعبي الجمباز على جهاز الألعاب بزاوية قياسها  $200^\circ$ . ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي وأوجد قياسها بالتقدير الدائري.

**الحل**



ارسم محورين لإنشاء مستوى إحداثي متعامد ومتقاطعين في النقطة و.

بفرض أن اللاعب يدور بزاوية موجهة أوب حيث:

$\angle (أوب) = (\overrightarrow{أوب}, \overrightarrow{أوب})$  فيكون  $\angle (أوب) = 200^\circ$ .

$180^\circ < 200^\circ < 270^\circ$

∴ الضلع النهائي للزاوية يقع في الربع الثالث.

$200^\circ = \frac{\pi \times 200}{180} \approx 3,49$

**حاول أن تحل**

**٤ الربط بالألعاب الرياضية:** لاعب اسكواش تحرك في مسار على شكل قوس طول نصف قطره  $1,4$  متر وزاوية دوران اللاعب  $80^\circ$  أوجد لأقرب جزء من عشرة طول هذا القوس.

**تحقق من فهمك**

**١ الصناعة:** يدور قرص آلة بزاوية قياسها  $315^\circ$  ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.



## تمارين ٤ - ٢



أولاً: اختيار من متعدد:

١) الزاوية التي قياسها  $60^\circ$  في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها:

- أ)  $120^\circ$       ب)  $240^\circ$       ج)  $300^\circ$       د)  $420^\circ$

٢) الزاوية التي قياسها  $\frac{\pi}{7}$  تقع في الربع:

- أ) الأول      ب) الثاني      ج) الثالث      د) الرابع

٣) الزاوية التي قياسها  $\frac{\pi}{4}$  تقع في الربع:

- أ) الأول      ب) الثاني      ج) الثالث      د) الرابع

٤) إذا كان مجموع قياسات زوايا أي مضلع منتظم تساوي  $180^\circ$  (ن - ٢) حيث ن عدد الأضلاع، فإن قياس زاوية الخمس المنتظم بالقياس الدائري تساوي:

- أ)  $\frac{\pi}{3}$       ب)  $\frac{\pi}{2}$       ج)  $\frac{\pi}{3}$       د)  $\frac{\pi}{2}$

٥) الزاوية التي قياسها  $\frac{\pi}{3}$  قياسها الستيني يساوي:

- أ)  $10^\circ$       ب)  $210^\circ$       ج)  $420^\circ$       د)  $840^\circ$

٦) إذا كان القياس الستيني لزاوية هو  $48^\circ$  فإن قياسها الدائري يساوي:

- أ)  $18^\circ$       ب)  $36^\circ$       ج)  $18^\circ$       د)  $36^\circ$

٧) طول القوس في دائرة طول قطرها ٢٤ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها  $30^\circ$  يساوي:

- أ)  $2\pi$  سم      ب)  $3\pi$  سم      ج)  $4\pi$  سم      د)  $5\pi$  سم

٨) القوس الذي طوله  $\pi$  سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوي:

- أ)  $30^\circ$       ب)  $60^\circ$       ج)  $90^\circ$       د)  $180^\circ$

٩) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث  $70^\circ$  وقياس زاوية أخرى فيه  $\frac{\pi}{4}$  فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة

يساوي:

- أ)  $\frac{\pi}{6}$       ب)  $\frac{\pi}{4}$       ج)  $\frac{\pi}{3}$       د)  $\frac{\pi}{12}$



**ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:**

١٠ أوجد بدلالة  $\pi$  القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالآتي:

- |               |              |
|---------------|--------------|
| ..... أ ٢٢٥°  | ..... ب ٢٤٠° |
| ..... ج ١٣٥°  | ..... د ٣٠٠° |
| ..... هـ ٣٩٠° | ..... و ٧٨٠° |

١١ أوجد القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالآتي، مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

- |               |                |                 |
|---------------|----------------|-----------------|
| ..... أ ٥٦,٦° | ..... ب ٢٥١,٨° | ..... ج ٤٨٠,٥٠° |
|---------------|----------------|-----------------|

١٢ أوجد القياس الستيني للزوايا التي قياساتها كالآتي، مقربًا الناتج لأقرب ثانية:

- |               |               |               |
|---------------|---------------|---------------|
| ..... أ ٤٩,٥° | ..... ب ٢٧,٣° | ..... ج ٣١,٣° |
|---------------|---------------|---------------|

١٣ إذا كان  $\theta$  قياس زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم وتحصر قوسًا طوله ل:

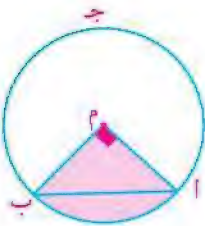
- |   |                     |
|---|---------------------|
| ..... أ إذا كان ١٠ سم، $\theta = ٢٠^\circ$ أو $١٥٠^\circ$ أوجد ل.     | (لأقرب جزء من عشرة) |
| ..... ب إذا كان ل = ٣ سم، $\theta = ٢٤^\circ$ أو $٧٨٠^\circ$ أوجد ١٠. | (لأقرب جزء من عشرة) |

١٤ زاوية مركزية قياسها  $١٥٠^\circ$  وتحصر قوسًا طوله ١١ سم، احسب طول نصف قطر دائرتها (لأقرب جزء من عشرة)

١٥ أوجد القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية المركزية التي تقابل قوسًا طوله ٨,٧ سم في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم.

١٦ **الربط بالهندسة:** مثلث قياس إحدى زواياه  $٦٠^\circ$  وقياس زاوية أخرى منه يساوي  $\frac{\pi}{٤}$  أوجد القياس الدائري والقياس الستيني لزوايته الثالثة.

١٧ **الربط بالهندسة:** دائرة طول نصف قطرها ٤ سم، رسمت  $\triangle$  ب ج المحيطية التي قياسها  $٣٠^\circ$  أوجد طول القوس الأصغر  $\widehat{AB}$

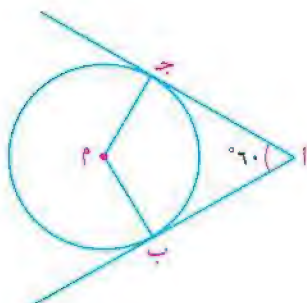


١٨ **الربط بالهندسة:** في الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية في م = ٣٢ سم<sup>٢</sup> فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين

١٩) **الربط بالهندسة:**  $\overline{AB}$  قطر في دائرة طوله ٢٤ سم ، رسم الوتر  $\overline{AC}$  بحيث كان  $\angle C = 50^\circ$  أوجد طول القوس الأصغر  $\widehat{AC}$  مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٢٠) **مسافات:** كم المسافة التي تقطعها نقطة على طرف عقرب الدقائق خلال ١٠ دقائق إذا كان طول هذا العقرب ٦ سم؟

٢١) **فلك:** قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري دورة كاملة كل ٦ ساعات، فإذا كان طول نصف قطر مساره عن مركز الأرض ٩٠٠٠ كم، فأوجد سرعته بالكيلومتر في الساعة.



٢٢) **الربط بالهندسة:** في الشكل المقابل:

$\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$  مماسان للدائرة م، و  $\angle A = 60^\circ$ ،  $AB = 12$  سم. أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر  $\widehat{BC}$ .



٢٣) **الربط بالزمن:** تستخدم المزولة الشمسية لتحديد الوقت أثناء النهار من خلال طول الظل الذي يسقط على سطح مدرج لإظهار الساعة وأجزائها، فإذا كان الظل يدور على القرص بمعدل  $15^\circ$  لكل ساعة.

أ) أوجد قياس الزاوية بالراديان التي يدور الظل عنها بعد مرور ٤ ساعات.

ب) بعد كم ساعة يدور الظل بزاوية قياسها  $\frac{2\pi}{3}$  راديان؟

ج) مزولة طول نصف قطرها ٢٤ سم، أوجد بدلالة  $\pi$  طول القوس الذي يصنعه دوران الظل على حافة القرص بعد مرور ١٠ ساعات.

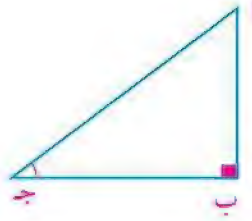
٢٤) **تفكير ناقد:** مستقيم يصنع زاوية قياسها  $\frac{\pi}{3}$  في الوضع القياسي لدائرة الوحدة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. أوجد معادلة هذا المستقيم.

## سوف نتعلم

- دائرة الوحدة.
- الدوال المثلثية الأساسية.
- مقلوبات الدوال المثلثية الأساسية.
- إشارات الدوال المثلثية.
- الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.



سبق أن درست النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة. وفي  $\Delta$  أ ب ج القائم الزاوية في ب نجد:



$$\text{جا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جتا ج} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{ظا ج} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$$

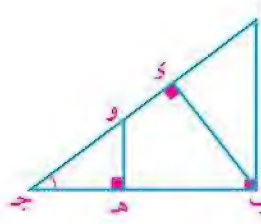
١- في الشكل المقابل عبر عن

جا ج بثلاث نسب مختلفة.

★ هل تتساوى هذه النسب؟ فسر إجابتك.

★ ماذا تستنتج؟

**لاحظ أن:**



المثلثات ب أ ج ، هـ و ج ، ز ب ج متشابهة (لماذا)؟

ومن التشابه يكون:  $\frac{\text{ب أ}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{و ج}} = \frac{\text{ز ب}}{\text{ب ج}}$  جا ج لماذا؟

**أي أن:** النسبة المثلثية للزاوية الحادة نسبة ثابتة لا تتغير إلا إذا تغيرت الزاوية نفسها.

٢- يبين الشكل المقابل ربع دائرة طول نصف قطرها هو سم

حيث:  $\theta = (\angle \text{ز و ج})$

$$\text{جا } \theta = \frac{\text{ز ج}}{\text{و ج}}$$

وعندما يزداد  $\theta$  ( $\angle \text{ز و ج}$ ) إلى  $\alpha$

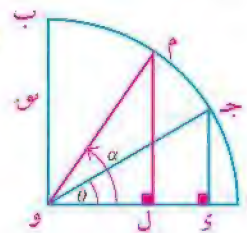
$$\text{فإن جا } \alpha = \frac{\text{م ل}}{\text{و ج}}$$

**أي أن** النسبة المثلثية لزاوية تتغير بتغير قياس زاويتها،

وهذا ما يعرف بالدوال المثلثية.

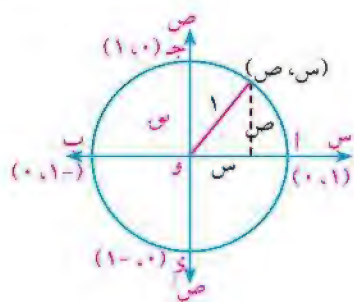
## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.





## The unit circle



## دائرة الوحدة

في أى نظام إحداثى متعامد تسمى الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى وحدة الأطوال بدائرة الوحدة.

★ دائرة الوحدة تقطع محور السينات في النقطتين أ (1، 0)، ب (0، 1-) وتقطع محور الصادات في النقطتين ج (1، 0)، د (0، 1-).

★ إذا كان (س، ص) هما إحداثيا أى نقطة على دائرة الوحدة فإن:

$$س \in [-1, 1] ، ص \in [-1, 1].$$

$$حيث س^2 + ص^2 = 1 \quad \text{نظرية فيثاغورث}$$

## The basic trigonometric functions of an angle الدوال المثلثية الأساسية للزاوية

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) وقياسها  $\theta$  يمكن تعريف الدوال الآتية:

١- جيب تمام الزاوية  $\theta$  = الإحداثى السينى للنقطة ب

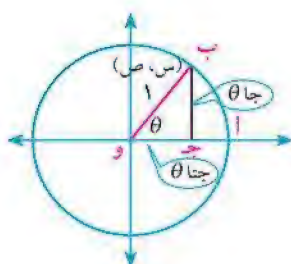
$$\text{أى أن: } \cos \theta = س$$

٢- جيب الزاوية  $\theta$  = الإحداثى الصادى للنقطة ب

$$\text{أى أن: } \sin \theta = ص$$

٣- ظل الزاوية  $\theta$  =  $\frac{\text{الإحداثى الصادى للنقطة ب}}{\text{الإحداثى السينى للنقطة ب}}$

$$\text{أى أن: } \tan \theta = \frac{ص}{س} \quad \text{حيث } س \neq 0, \quad \cot \theta = \frac{س}{ص} \quad \text{حيث } ص \neq 0$$



**لاحظ أن:** يكتب الزوج المرتب (س، ص) لأى نقطة على دائرة الوحدة بالصورة (جتا  $\theta$ ، جا  $\theta$ )

إذا كانت النقطة ج(0، 1) هى نقطة تقاطع الضلع النهائى لزاوية موجهة قياسها  $\theta$  مع دائرة الوحدة

$$\text{فإن: } \cot \theta = \frac{ص}{س}, \quad \tan \theta = \frac{ص}{س}, \quad \csc \theta = \frac{1}{ص}, \quad \sec \theta = \frac{1}{س}$$

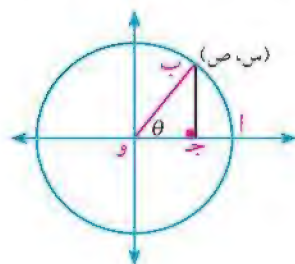
## The reciprocals of the basic trigonometric functions مقلوبات الدوال الأساسية

لأى زاوية موجهة في الوضع القياسى وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) وقياسها  $\theta$  توجد الدوال الآتية:

١- قاطع الزاوية  $\theta$ :  $\csc \theta = \frac{1}{ص} = \frac{1}{\sin \theta}$  حيث  $ص \neq 0$

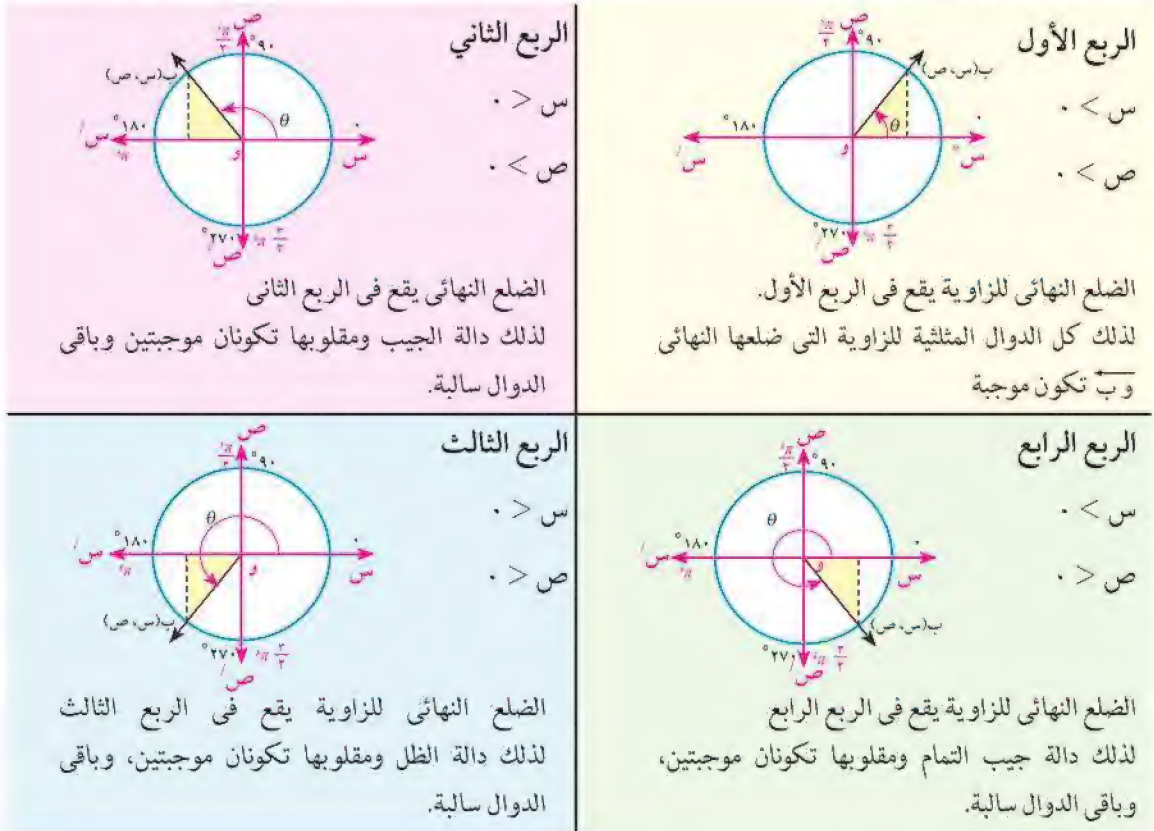
٢- قاطع تمام الزاوية  $\theta$ :  $\sec \theta = \frac{1}{س} = \frac{1}{\cos \theta}$  حيث  $س \neq 0$

٣- ظل تمام الزاوية  $\theta$ :  $\cot \theta = \frac{س}{ص} = \frac{1}{\tan \theta}$  حيث  $ص \neq 0$

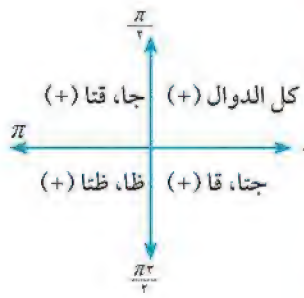


## The signs of The Trigonometric Functions

## إشارات الدوال المثلثية



ويمكن تلخيص إشارات الدوال المثلثية جميعها في الجدول الآتي:



الربع الذي يقع فيه الضلع النهائي للزاوية	الفترة التي يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال المثلثية		
		جا، قتا	جتا، قا	ظنا
الأول	$], \frac{\pi}{2} , 0 [$	+	+	+
الثاني	$], \pi , \frac{\pi}{2} [$	+	-	-
الثالث	$], \frac{3\pi}{2} , \pi [$	-	-	+
الرابع	$], \frac{3\pi}{2} , 2\pi [$	-	+	-

## مثال

١ عین إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

- أ) جا  $130^\circ$     ب) ظا  $315^\circ$     ج) جتا  $650^\circ$     د) قا  $(-30^\circ)$

## الحل

أ) الزاوية التي قياسها  $130^\circ$  تقع في الربع الثاني. ∴ جا  $130^\circ$  موجبة



- ب) الزاوية التي قياسها  $315^\circ$  تقع في الربع الرابع  
 ج) الزاوية التي قياسها  $650^\circ$  تكافئ زاوية قياسها  $650^\circ - 360^\circ = 290^\circ$   
 د) الزاوية التي قياسها  $650^\circ$  تقع في الربع الرابع  
 هـ) الزاوية التي قياسها  $(-30^\circ)$  تكافئ زاوية قياسها  $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$   
 و) الزاوية التي قياسها  $(-30^\circ)$  تقع في الربع الرابع  
 ز) قـا  $(-30^\circ)$  موجبة.  
 ح) ظـا  $315^\circ$  سالبة.

### حاول أن تحل

١) عين إشارة كل من النسب المثلثية الآتية:

- أ) جتا  $210^\circ$     ب) جا  $740^\circ$     ج) ظـا  $300^\circ$     د) جا  $1230^\circ$

### مثال

٢) إذا كانت  $\triangle$  أ ب في وضعها القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب وقياسها  $\theta$ . أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ ب إذا كان إحداثيا النقطة ب هي:

- أ)  $(1, 0)$     ب)  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$     ج)  $(-s, s)$

حيث  $s < 0$  ،  $v < 0$

### الحل

أ) جتا  $\theta = 0$  ، جا  $\theta = 1$  ، ظـا  $\theta = \frac{1}{0}$  (غير معرف)

ب)  $s^2 + v^2 = 1$  ، بالتعويض عن  $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (دائرة الوحدة)

$$1 = v^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \text{فيكون}$$

$$v^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore v = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{أو} \quad v = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(مرفوض)}$$

$$\therefore \text{جتا } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{جا } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ظـا } \theta = 1$$

$$\text{ج) } (-s)^2 + (s)^2 = 1 \quad \therefore s^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore s = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{لأن } s < 0$$

$$\therefore s = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{أو} \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ويكون: جتا } \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{جا } \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ظـا } \theta = -1$$

٣) إذا كانت  $270^\circ < \theta < 360^\circ$  وكان جا  $\theta = -\frac{5}{13}$  أوجد جميع النسب المثلثية الأساسية للزاوية التي قياسها  $\theta$

### الحل

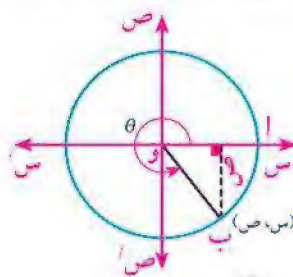
نفرض أن  $\triangle$  أ ب  $\theta = \angle$  أ ب حيث  $\theta$  في الربع الرابع

وأن إحداثيي النقطة ب هما  $(s, v)$

$$\therefore v = \text{جتا } \theta = -\frac{5}{13} \quad \text{جا } \theta = s \quad \text{حيث جتا } \theta < 0$$

$$\therefore s^2 + v^2 = 1 \quad \therefore s^2 + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \text{جتا } \theta = -\frac{5}{13} \quad \text{أو} \quad \text{جتا } \theta = \frac{12}{13} \quad \text{أو} \quad \text{جتا } \theta = -\frac{12}{13}$$





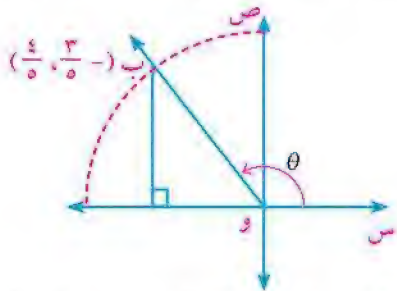
$$\text{جتا } \theta = \frac{12}{13} \text{ ؟ (لماذا)؟} \quad \text{طا } \theta = \frac{5}{13}$$

حاول أن تحل

٢ إذا كانت  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، جا  $\theta = \frac{4}{5}$  أوجد جتا  $\theta$ ، ظا  $\theta$  حيث  $\theta$  زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة.

مثال

٤ إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  و المرسومة في الوضع القياسي، و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ . فأوجد جميع النسب المثلثية للزاوية  $\theta$ .



الحل

$$\begin{aligned} \text{جا } \theta &= \frac{4}{5}, \quad \text{جتا } \theta = -\frac{3}{5}, \quad \text{ظا } \theta = -\frac{4}{3}, \quad \text{ظتا } \theta = \frac{3}{4} \\ \text{قسا } \theta &= \frac{5}{4}, \quad \text{قسا } \theta = -\frac{5}{3}, \quad \text{قسا } \theta = \frac{3}{4}, \quad \text{قسا } \theta = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

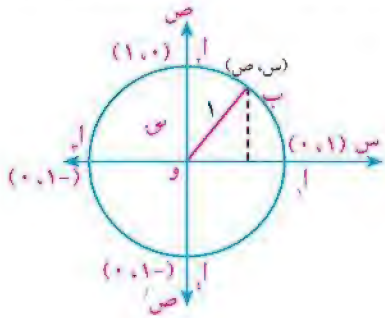
حاول أن تحل

٣ أوجد جميع النسب المثلثية للزاوية التي قياسها  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي، و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب حيث:

$$\text{أ) ب } (\frac{12}{13}, \frac{5}{13}) \quad \text{ب) ب } (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \quad \text{ج) ب } (\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$$

### الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

The trigonometric functions of some special angles



في الشكل المقابل: قطعت دائرة الوحدة محوري الإحداثيات في النقاط

$$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1).$$

وكانت  $\theta$  قياس الزاوية الموجهة أ و ب في وضعها القياسي، والذي يقطع ضلعها النهائي و ب دائرة الوحدة في ب.

أولاً: إذا كانت  $\theta = 0^\circ$  أو  $\theta = 360^\circ$  فإن: ب  $(1, 0)$

ويكون: جتا  $0^\circ = \text{جتا } 360^\circ = 1$ ، جا  $0^\circ = \text{جتا } 360^\circ = \text{صفر}$ ،

$$\text{ظا } 0^\circ = \text{ظا } 360^\circ = \text{صفر}$$

ثانياً: إذا كانت  $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$  فإن: ب  $(0, 1)$

$$\text{جتا } 90^\circ = \text{صفر} \quad \text{جا } 90^\circ = 1 \quad \text{ظا } 90^\circ = \frac{1}{0} \quad (\text{غير معرف})$$

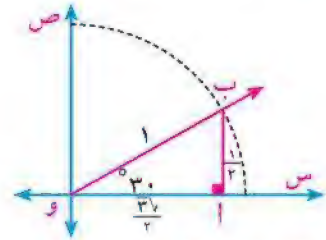
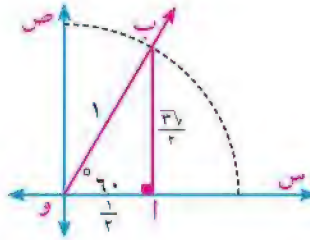
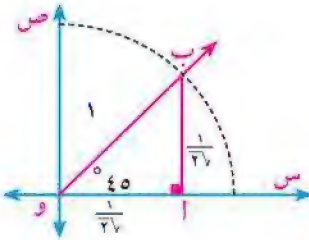
ثالثاً: إذا كانت  $\theta = 180^\circ = \pi$  فإن: ب  $(-1, 0)$

$$\text{جتا } 180^\circ = -1 \quad \text{جا } 180^\circ = \text{صفر} \quad \text{ظا } 180^\circ = \text{صفر}$$

رابعاً: إذا كانت  $\theta = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$  فإن: ب (1, 0) ، جتا  $270^\circ = 0$  ، جا  $270^\circ = -1$  ، ظا  $270^\circ = \frac{1}{0}$  (غير معرف)

#### حاول أن تحل

٤ في الأشكال التالية حدد إحداثيي النقطة ب لكل شكل واستنتج الدوال المثلثية لقياسات الزوايا  $30^\circ$ ،  $60^\circ$ ،  $45^\circ$



#### مثال

٥ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن: جا  $60^\circ$  جتا  $30^\circ$  - جتا  $60^\circ$  جا  $30^\circ$  = جا  $\frac{\pi}{4}$

#### الحل

تعلم أن جا  $30^\circ = \frac{1}{2}$  ، جتا  $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ، جا  $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ، جتا  $60^\circ = \frac{1}{2}$

$$(1) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad \text{الطرف الأيسر}$$

من (1)، (2) . الطرفان متساويان.

#### حاول أن تحل

٥ أوجد قيمة: ٣ جا  $30^\circ$  جا  $60^\circ$  - جتا  $60^\circ$  جا  $270^\circ$  جتا  $45^\circ$

٦ تفكير ناقد: إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  مرسومة في الوضع القياسي، وكان جتا  $\theta = \frac{1}{2}$  ، جا  $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  هل من الممكن أن يكون  $\theta = 240^\circ$ ؟ وضح ذلك.

#### تحقق من فهمك

أثبت صحة كل من المتساويات التالية:

$$1 - 2 \text{ جا } 90^\circ = \text{جتا } 180^\circ \quad \text{ب} \quad \text{جتا } \frac{\pi}{2} = \text{جتا } \frac{\pi}{4} - \text{جتا } \frac{\pi}{4}$$



## تمارين ٤ - ٣



أولاً: الاختيار من متعدد:

١ إذا كان  $\theta$  قياس زاوية في الوضع القياسي و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  فإن  $\theta$  تساوي:

- أ  $\frac{1}{2}$  ب  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ج  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  د  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

٢ إذا كانت  $\theta = \frac{1}{4}$  حيث  $\theta$  زاوية حادة فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $30^\circ$  ب  $45^\circ$  ج  $60^\circ$  د  $90^\circ$

٣ إذا كانت  $\theta = -1$ ، جتا  $\theta = 0$  فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $\frac{\pi}{4}$  ب  $\pi$  ج  $\frac{\pi}{2}$  د  $2\pi$

٤ إذا كانت قتا  $\theta = 2$  حيث  $\theta$  قياس زاوية حادة فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $15^\circ$  ب  $30^\circ$  ج  $45^\circ$  د  $60^\circ$

٥ إذا كانت جتا  $\theta = \frac{1}{4}$ ، جا  $\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$  فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $\frac{\pi}{3}$  ب  $\frac{\pi}{6}$  ج  $\frac{\pi}{4}$  د  $\frac{\pi}{11}$

٦ إذا كانت ظا  $\theta = 1$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $10^\circ$  ب  $30^\circ$  ج  $45^\circ$  د  $60^\circ$

٧ ظا  $5^\circ +$  ظا  $45^\circ -$  قا  $60^\circ$  تساوي

- أ صفرًا ب  $\frac{1}{4}$  ج  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  د  $1$

٨ إذا كانت جتا  $\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$  حيث  $\theta$  قياس زاوية حادة فإن  $\theta$  تساوي

- أ  $\frac{1}{4}$  ب  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ج  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  د  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

٩ أوجد جميع الدوال المثلثية لزاوية قياسها  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي، وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة

- أ  $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$  ب  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  ج  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  د  $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$



١٠ إذا كان  $\theta$  هو قياس زاويه موجهة في الوضع القياسى، وضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة المعطاه فأوجد جميع الدوال المثلثية لهذه الزاوية فى الحالات الآتية:

أ (١٤ - ، ١٣) حيث  $0 <$

ب (١٢ - ، ١٢) حيث  $\pi/2 > \theta > \pi/3$

١١ اكتب إشارات النسب المثلثية الآتية:

ج قتا  $410^\circ$

ب ظا  $365^\circ$

أ جا  $240^\circ$

و ظا  $\frac{\pi/2 -}{9}$

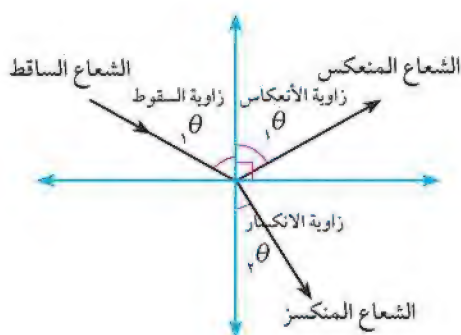
ه قأ  $\frac{\pi/9}{4}$

د ظتا  $\frac{\pi/9}{4}$

١٢ أوجد قيمة ما يأتى:

أ جتا  $\frac{\pi}{4} \times$  جتا  $\frac{\pi}{4} + 0$  جا  $\frac{\pi}{4} \times$  جا  $\frac{\pi}{4}$

ب ظا  $30^\circ + 2$  جا  $45^\circ +$  جتا  $90^\circ$



١٣ **الربط بالفيزياء:** عند سقوط أشعة الضوء على سطح

شبه شفاف، فإنها تنعكس بنفس زاوية السقوط ولكن البعض منها ينكسر عند مروره خلال هذا السطح. كما فى الشكل المجاور:

إذا كان جا  $\theta = \frac{1}{2}$  جا  $\theta$ ، كانت  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ،  $\theta = 30^\circ$ ،  $\theta = 60^\circ$  فأوجد قياس زاوية  $\theta$ .

١٤ **اكتشف الخطأ:** طلب المعلم من طلاب الفصل إيجاد ناتج  $2$  جا  $45^\circ$ .

إجابة أحمد

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 = 45^\circ \text{ جا } 2$$

إجابة كريم

$$2 \text{ جا } 45^\circ = 45^\circ \times 2 = 1 = 90^\circ \text{ جا } 1$$

أى الإجابتين صحيح؟ ولماذا؟

١٥ **تفكير ناقد:** إذا كانت  $\theta$  قياس زاوية مرسومة فى الوضع القياسى، حيث ظتا  $\theta = 1$ ، قتا  $\theta = \frac{1}{2}$ ، هل

من الممكن أن يكون  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ؟ فسر إجابتك.

## سوف نتعلم

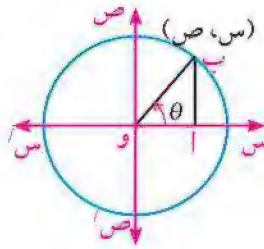
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$ ،  $\theta \pm 180^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$ ،  $\theta - 360^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$ ،  $\theta \pm 90^\circ$
- العلاقة بين الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$ ،  $\theta \pm 270^\circ$
- الحل العام للمعادلات المثلثية التي على الصورة:

$$\beta = \alpha \text{ جا } \beta = \alpha \text{ قتا}$$

$$\beta = \alpha \text{ قتا } \beta = \alpha \text{ ظتا}$$

## المصطلحات الأساسية

Related Angles زاويتان منتسبتان

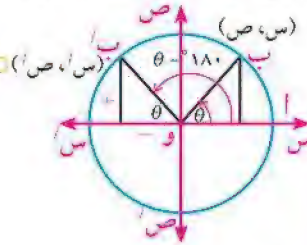


سبق أن درست الانعكاس وتعرفت على خواصه .  
يبين الشكل المقابل الزاوية الموجهة أ ب في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص). قياسها  $\theta$  حيث  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .

عين النقطة ب' صورة النقطة ب بالانعكاس حول محور الصادات، واذكر إحداثيها.  
ما قياس  $\angle$  أ ب'؟ هل  $\angle$  أ ب' في الوضع القياسي؟

١ - الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما  $\theta$ ،  $(\theta - 180^\circ)$ 

من الشكل المقابل ب' (س'، ص') صورة النقطة ب(س، ص) بالانعكاس حول محور الصادات فيكون س' = -س، ص' = -ص  
لذلك فإن:



$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 180^\circ) &= -\text{جا } \theta ، \text{ قتا } (\theta - 180^\circ) = -\text{قتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - 180^\circ) &= -\text{جتا } \theta ، \text{ ظتا } (\theta - 180^\circ) = -\text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{فمثلاً: جتا } 120^\circ &= \text{جتا } (120^\circ - 180^\circ) = \text{جتا } (-60^\circ) = -\text{جتا } 60^\circ = -\frac{1}{2} \\ \text{جا } 135^\circ &= \text{جا } (135^\circ - 180^\circ) = \text{جا } (-45^\circ) = -\text{جا } 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

## حاول أن تحل

$$1) \text{ أوجد ظا } 135^\circ ، \text{ جا } 120^\circ ، \text{ جتا } 150^\circ$$

$$\text{لاحظ أن: } 180^\circ = (\theta - 180^\circ) + \theta$$

يقال إن الزاويتين  $\theta$ ،  $\theta - 180^\circ$  زاويتان منتسبتان.

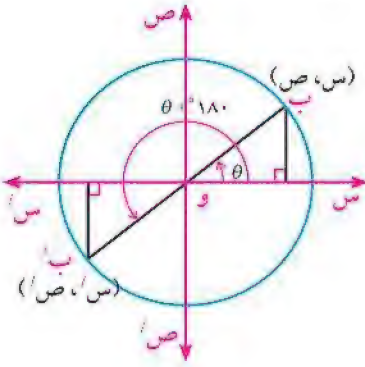
## تعريف

الزاويتان المنتسبتان: هما زاويتان الفرق بين قياسيهما أو مجموع قياسيهما يساوي عددًا صحيح من القوائم.

## ٢- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما $\theta$ ، $(\theta + 180^\circ)$

في الشكل المقابل نجد:

ب/ (س، ص) صورة النقطة ب (س، ص) بالانعكاس في نقطة الأصل و فيكون س' = -س ، ص' = -ص  
لذلك فإن:



$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 180^\circ) &= -\text{جا } \theta & \text{قتا } (\theta + 180^\circ) &= -\text{قتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 180^\circ) &= -\text{جتا } \theta & \text{قا } (\theta + 180^\circ) &= -\text{قا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 180^\circ) &= \text{ظا } \theta & \text{ظتا } (\theta + 180^\circ) &= \text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

فمثلاً:

$$\begin{aligned} \text{جا } 210^\circ &= -\text{جا } 30^\circ = -\text{جا } (30^\circ + 180^\circ) \\ \text{جتا } 225^\circ &= -\text{جتا } 45^\circ = -\text{جتا } (45^\circ + 180^\circ) \\ \text{ظا } 240^\circ &= \text{ظا } 60^\circ = \text{ظا } (60^\circ + 180^\circ) \end{aligned}$$

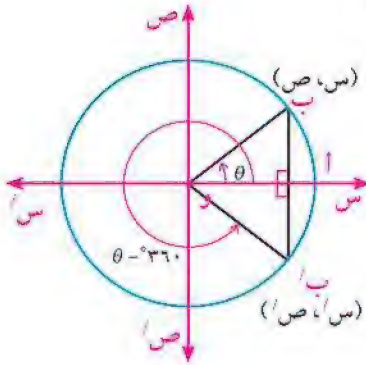
حاول أن تحل

٢ أوجد جا ٢٢٥ ، جتا ٢١٠ ، قا ٦٠٠ ، ظتا ٢٢٥.

## ٣- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما $\theta$ ، $(\theta - 360^\circ)$

في الشكل المقابل:

ب/ (س، ص) صورة النقطة ب (س، ص) بالانعكاس حول محور السينات فيكون س' = س ، ص' = -ص  
لذلك فإن:



$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 360^\circ) &= \text{جا } \theta & \text{قتا } (\theta - 360^\circ) &= \text{قتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - 360^\circ) &= \text{جتا } \theta & \text{قا } (\theta - 360^\circ) &= \text{قا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - 360^\circ) &= \text{ظا } \theta & \text{ظتا } (\theta - 360^\circ) &= \text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

فمثلاً:

$$\begin{aligned} \text{جا } 330^\circ &= \text{جا } 30^\circ = \text{جا } (30^\circ - 360^\circ) \\ \text{جتا } 315^\circ &= \text{جتا } 45^\circ = \text{جتا } (45^\circ - 360^\circ) \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٣ أوجد: جا ٣١٥ ، قتا ٣١٥ ، ظا ٣٣٠ ، ظتا ٣٠٠.

تفكير ناقذ: كيف يمكنك إيجاد جا (-٤٥) ، جتا (-٦٠) ، ظا (-٣٠) ، جا ٦٩٠.

لاحظ أن

الدوال المثلثية للزاوية  $(\theta -)$   
هي نفسها الدوال المثلثية  
للزاوية  $(\theta - 360^\circ)$



### مثال

١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة المقدار

$$\text{جا } ١٥٠^\circ + (\text{جتا } ٣٠^\circ - \text{جتا } ٩٣^\circ) \text{ ظلنا } ٢٤٠^\circ$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{جا } ١٥٠^\circ &= \text{جا } (١٨٠^\circ - ٣٠^\circ) = \frac{1}{2} \\ \text{جتا } (٣٠^\circ - ٩٣^\circ) &= \text{جتا } (٣٦٠^\circ - ٩٣^\circ) = \frac{1}{2} \\ \text{جتا } ٩٣^\circ &= \text{جتا } (٣٦٠^\circ - ٢١^\circ) = \frac{1}{2} \\ \text{وتكون جتا } ٢١^\circ &= \text{جتا } (٣٠^\circ + ١٨^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ظلنا } ٢٤٠^\circ &= \text{ظلنا } (٦٠^\circ + ١٨٠^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{المقدار} &= \frac{1}{2} \times \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٤ أثبت أن  $\text{جا } ٦٠^\circ + \text{جتا } ٣٠^\circ + \text{جتا } ١٥٠^\circ = ١$

### ٤- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما $\theta$ ، $(\theta - ٩٠^\circ)$

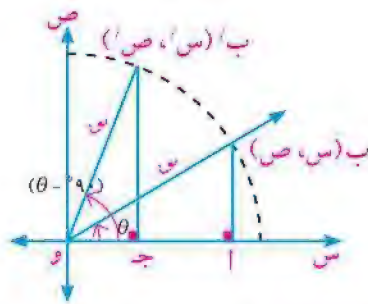
يبين الشكل المجاور جزءاً من دائرة مركزها  $O$ .

الزاوية التي قياسها  $\theta$  مرسومة في الوضع القياسى لدائرة طول نصف قطرها  $r$ .

من تطابق المثلثين  $OAB$  ، و  $OCD$  :

نجد أن:  $\sin \theta = \sin(\theta - ٩٠^\circ)$  ،  $\cos \theta = \cos(\theta - ٩٠^\circ)$

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$  ،  $(\theta - ٩٠^\circ)$



$$\text{جا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{جتا } \theta ، \text{ قتا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{قا } \theta$$

$$\text{جتا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{جا } \theta ، \text{ قتا } \theta = \text{قتا } (\theta - ٩٠^\circ)$$

$$\text{ظنا } (\theta - ٩٠^\circ) = \text{ظلنا } \theta ، \text{ ظلنا } \theta = \text{ظلنا } (\theta - ٩٠^\circ)$$

### مثال

١ إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  في الوضع القياسى، ويمر ضلعها النهائى بالنقطة  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

فأوجد الدوال المثلثية:  $\text{جا } (\theta - ٩٠^\circ)$  ،  $\text{ظلنا } (\theta - ٩٠^\circ)$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{جا } (\theta - 90^\circ) &= \text{جتا } \theta \\ \therefore \text{ظنا } (\theta - 90^\circ) &= \text{ظا } \theta \\ \therefore \text{جا } (\theta - 90^\circ) &= \frac{3}{5} \\ \therefore \text{ظنا } (\theta - 90^\circ) &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

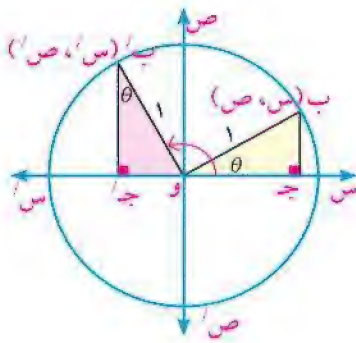
حاول أن تحل

٥ في المثال السابق أوجد جتا  $(\theta - 90^\circ)$  ، قتا  $(\theta - 90^\circ)$

## ٥- الدوال المثلثية لأى زاويتين قياسيهما $\theta$ ، $(\theta + 90^\circ)$

من تطابق المثلثين ب' ج' و ، وجب

نجد أن  $\text{ص} = \text{س}$  ،  $\text{س} = -\text{ص}$



ومن ذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$  ،  $(\theta + 90^\circ)$  كالآتي:

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 90^\circ) &= \text{جتا } \theta ، \text{ قتا } (\theta + 90^\circ) = \text{قا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{جا } \theta ، \text{ قا } (\theta + 90^\circ) = -\text{قتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{ظنا } \theta ، \text{ ظنا } (\theta + 90^\circ) = -\text{ظا } \theta \end{aligned}$$

مثال

٢ إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي يمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$  أوجد الدوال المثلثية ظا  $(\theta + 90^\circ)$  ، قتا  $(\theta + 90^\circ)$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{ظنا } \theta \\ \therefore \text{قتا } (\theta + 90^\circ) &= \text{قا } \theta \\ \therefore \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \therefore \text{قتا } (\theta + 90^\circ) &= \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \end{aligned}$$

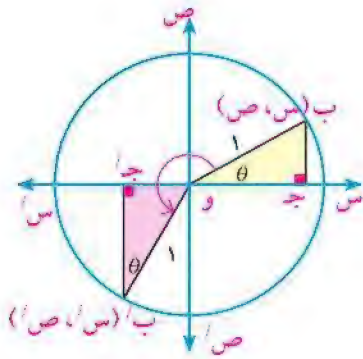
حاول أن تحل

٦ في المثال السابق أوجد: جا  $(\theta + 90^\circ)$  ، قا  $(\theta + 90^\circ)$

## ٦- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما $\theta$ ، $(\theta - 270^\circ)$

من تطابق المثلثين ب/ج/و ، وج ب

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$  ،  $(\theta - 270^\circ)$  كالآتي:



$$\text{جا } (\theta - 270^\circ) = -\text{جتا } \theta ، \text{ قتا } (\theta - 270^\circ) = -\text{قا } \theta$$

$$\text{جتا } (\theta - 270^\circ) = -\text{جا } \theta ، \text{ قا } (\theta - 270^\circ) = -\text{قتا } \theta$$

$$\text{ظا } (\theta - 270^\circ) = \text{ظتا } \theta ، \text{ ظتا } (\theta - 270^\circ) = \text{ظا } \theta$$

مثال

٣ إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسي يمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4})$  فأوجد الدوال المثلثية: جتا  $(\theta - 270^\circ)$  ، ظتا  $(\theta - 270^\circ)$

الحل

$$\therefore \text{جتا } (\theta - 270^\circ) = -\text{جا } \theta \quad \therefore \text{جتا } (\theta - 270^\circ) = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) = \text{ظتا } \theta \quad \therefore \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

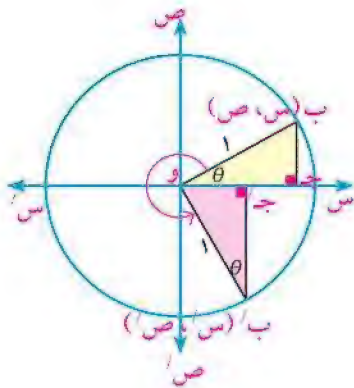
حاول أن تحل

٧ في المثال السابق أوجد ظا  $(\theta - 270^\circ)$  ، قتا  $(\theta - 270^\circ)$

## ٧- الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسيهما $\theta$ ، $(\theta + 270^\circ)$

من تطابق المثلثين: ب/ج/و، وج ب

لذلك يمكن استنتاج جميع الدوال المثلثية للزاويتين  $\theta$  ،  $(\theta + 270^\circ)$  كالآتي:



$$\text{جا } (\theta + 270^\circ) = -\text{جتا } \theta ، \text{ قتا } (\theta + 270^\circ) = -\text{قا } \theta$$

$$\text{جتا } (\theta + 270^\circ) = \text{جا } \theta ، \text{ قا } (\theta + 270^\circ) = \text{قتا } \theta$$

$$\text{ظا } (\theta + 270^\circ) = -\text{ظتا } \theta ، \text{ ظتا } (\theta + 270^\circ) = -\text{ظا } \theta$$

مثال

٤ إذا كانت الزاوية التي قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي يمر ضلعها النهائي بالنقطة  $(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$  فأوجد الدوال المثلثية: جا  $(\theta + 270^\circ)$  ، قا  $(\theta + 270^\circ)$



$$\begin{aligned} \therefore \text{جا } (\theta + ^\circ 270) &= -\text{جتا } \theta \\ \therefore \text{قا } (\theta + ^\circ 270) &= \text{قتا } \theta \\ \therefore \text{جا } (\theta + ^\circ 270) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \text{قا } (\theta + ^\circ 270) &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٨ في المثال السابق أوجد ظنا  $(\theta + ^\circ 270)$  ، قتا  $(\theta + ^\circ 270)$ .

الحل العام للمعادلات المثلثية التي على الصورة: (جا  $\alpha$  = جتا  $\beta$  ، قا  $\alpha$  = قتا  $\beta$  ، ظا  $\alpha$  = جتا  $\beta$ )

General solution of trigonometric equations as the form  $[\tan(\alpha) = \cot(\beta), \sec(\alpha) = \csc(\beta), \sin(\alpha) = \cos(\beta)]$

فكر q ناقش

سبق أن درست أنه إذا كان  $\alpha, \beta$  هما قياسا زاويتين متتامتين (أي مجموع قياسيهما  $90^\circ$ ) فإن جا  $\alpha$  = جتا  $\beta$  ، قا  $\alpha$  = قتا  $\beta$  ، ظا  $\alpha$  = جتا  $\beta$  ومن ذلك فإن  $\beta + \alpha = 90^\circ$  حيث  $\alpha, \beta$  زاويتان حادتان فإذا كانت جا  $\theta$  = جتا  $1^\circ$  فما هي قيم زاوية  $\theta$  المتوقعة؟

تعلم

١- إذا كان جا  $\alpha$  = جتا  $\beta$  (حيث  $\alpha, \beta$  قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

$$\begin{aligned} \alpha < \beta & \text{ جا } \alpha = \text{جتا } \beta \Rightarrow \beta - \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{ومن ذلك فإن:} \quad \beta - \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{أي} \quad \frac{\pi}{2} = \beta + \alpha \\ \alpha < \beta & \text{ جا } \alpha = \text{جتا } \beta \Rightarrow \beta + \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{ومن ذلك فإن:} \quad \beta + \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{أي} \quad \frac{\pi}{2} = \beta - \alpha \end{aligned}$$

وبإضافة  $2\pi n$  (حيث  $n \in \mathbb{Z}$ ) إلى الزاوية  $\frac{\pi}{2}$  فإن:

$$\text{عندما جا } \alpha = \text{جتا } \beta \quad \text{فإن } \beta \pm \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (\text{حيث } n \in \mathbb{Z}), \text{ بالمثل:}$$

$$\text{عندما قتا } \alpha = \text{قتا } \beta \quad \text{فإن } \beta \pm \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (\text{حيث } n \in \mathbb{Z}),$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \frac{\pi}{2} (1 + 2n) \neq \beta$$

٢- إذا كان ظا  $\alpha$  = جتا  $\beta$  (حيث  $\alpha, \beta$  قياسا زاويتين متتامتين) فإن:

$$\begin{aligned} \alpha < \beta & \text{ ظا } \alpha = \text{جتا } \beta \Rightarrow \beta - \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{ومن ذلك فإن:} \quad \beta - \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{أي} \quad \frac{\pi}{2} = \beta + \alpha \\ \alpha < \beta & \text{ ظا } \alpha = \text{جتا } \beta \Rightarrow \beta + \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{ومن ذلك فإن:} \quad \beta + \frac{\pi}{2} = \alpha \quad \text{أي} \quad \frac{\pi}{2} = \beta - \alpha \end{aligned}$$

وبإضافة  $2\pi n$  (حيث  $n \in \mathbb{Z}$ ) إلى الزاويتين  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  فإن:

$$\text{عندما ظا } \alpha = \text{جتا } \beta \quad \text{فإن } \beta + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (\text{حيث } n \in \mathbb{Z}),$$

$$\alpha \neq \beta, \quad \frac{\pi}{2} (1 + 2n) \neq \alpha$$

مثال

٥ حل المعادلة:  $\text{جا } \theta_2 = \text{جتا } \theta$

الحل

المعادلة:  $\text{جا } \theta_2 = \text{جتا } \theta$

من تعريف المعادلة (ن  $\exists$  ص)  $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta \pm \theta_2$

(١) إما  $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta + \theta_2$  أى أن:  $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta_2$

بقسمة الطرفين على ٣  $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta$

(٢) أو  $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta - \theta_2$  أى أن:  $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta$

حل المعادلة هو:  $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta$  أو  $\pi_2 + \frac{\pi}{4} = \theta$

حاول أن تحل

٩ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية:

أ  $\text{جا } \theta_2 = \text{جتا } \theta$  ب  $\text{جا } 2(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$  ج  $\text{جتا } \theta = \text{جتا } \theta$

١٠ اكتشف الخطأ: فى إحدى مسابقات الرياضيات طلب المعلم من كريم وزيد إيجاد قيمة  $\text{جا}(\frac{\pi}{4} - \theta)$  فأيهما إجابته صحيحة؟ فسر ذلك.

إجابة زياد

$$\begin{aligned} \text{جا}(\frac{\pi}{4} - \theta) &= \text{جا}[(\theta - \frac{\pi}{4}) -] \\ &= -\text{جا}(\theta - \frac{\pi}{4}) \\ &= -(-\text{جتا } \theta) = \text{جتا } \theta \end{aligned}$$

إجابة كريم

$$\begin{aligned} \text{جا}(\frac{\pi}{4} - \theta) &= \text{جا}(\frac{\pi}{4} - \theta + \pi_2) \\ &= \text{جا}(\theta + \frac{\pi}{4}) \\ &= -\text{جتا } \theta \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

أوجد جميع قيم  $\theta$  حيث  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  والتي تحقق كل من المعادلات الآتية:

أ  $\text{جا } \theta - \text{جتا } \theta = 0$  ب  $\text{جتا } 2(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$  ج  $\text{جتا } 2(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$



## تمارين ٤ - ٤



أولاً: أكمل ما يأتي:

- ١ جتا  $(\theta + 180^\circ) =$  .....  
 ٢ ظا  $(\theta - 180^\circ) =$  .....  
 ٣ قتا  $(\theta - 360^\circ) =$  .....  
 ٤ جا  $(\theta + 360^\circ) =$  .....  
 ٥ جا  $(\theta + 90^\circ) =$  .....  
 ٦ ظنا  $(\theta - 90^\circ) =$  .....  
 ٧ قا  $(\theta + 270^\circ) =$  .....  
 ٨ جتا  $(\theta - 270^\circ) =$  .....

ثانياً: أكمل كلاً مما يأتي بقياس زاوية حادة

- ٩ جا  $25^\circ =$  جتا .....  
 ١٠ جتا  $67^\circ =$  جا .....  
 ١١ ظا  $42^\circ =$  ظنا .....  
 ١٢ قتا  $13^\circ =$  قا .....  
 ١٣ إذا كان  $\theta_2 = \theta$  حيث  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  فإن  $(\theta \leq) =$  .....  
 ١٤ إذا كان جا  $\theta =$  جتا  $\theta$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن  $\theta =$  .....  
 ١٥ إذا كان قا  $\theta =$  قا  $(\theta - 90^\circ)$  فإن ظنا  $\theta =$  .....  
 ١٦ إذا كان ظا  $\theta_2 =$  ظنا  $\theta_3$  حيث  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  فإن  $(\theta \leq) =$  .....  
 ١٧ إذا كان جتا  $\theta =$  جتا  $\theta_2$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن جا  $\theta_3 =$  .....

ثالثاً: الاختيار من متعدد:

- ١٨ إذا كانت ظا  $(\theta + 180^\circ) = 1$  حيث  $\theta$  قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس  $\theta$  يساوي  
 أ  $45^\circ$  ب  $30^\circ$  ج  $60^\circ$  د  $135^\circ$   
 ١٩ إذا كان جتا  $\theta_2 =$  جا  $\theta$  حيث  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$  فإن جتا  $\theta_2$  تساوي  
 أ  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ب  $\frac{1}{2}$  ج  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  د  $1$   
 ٢٠ إذا كان جا  $\alpha =$  جتا  $\beta$ ، حيث  $\alpha, \beta$  زاويتان حادتان فإن ظا  $(\beta + \alpha)$  تساوي  
 أ  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ب  $1$  ج  $\sqrt{3}$  د غير معروف  
 ٢١ إذا كان جا  $\theta_2 =$  جتا  $\theta_4$  حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن ظا  $(\theta_3 - 90^\circ)$  تساوي  
 أ  $1 -$  ب  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  ج  $1$  د  $\sqrt{3}$   
 ٢٢ إذا كان جتا  $(\theta + 90^\circ) = \frac{1}{4}$  حيث  $\theta$  قياس أصغر زاوية موجبة فإن قياس  $\theta$  يساوي  
 أ  $150^\circ$  ب  $210^\circ$  ج  $240^\circ$  د  $330^\circ$



رابعاً: أجب عن الأسئلة الآتية

٢٣) أوجد إحدى قيم  $\theta$  حيث  $0 < \theta < 90^\circ$  التي تحقق كلاً من الآتي:

أ)  $\text{جا}(\theta + 10^\circ) = \text{جتا}(\theta - 5^\circ)$

ب)  $\text{قا}(\theta + 20^\circ) = \text{قتا}(\theta + 10^\circ)$

ج)  $\text{ظا}(\theta + 20^\circ) = \text{ظتا}(\theta + 30^\circ)$

د)  $\text{جتا} \frac{\theta + 20^\circ}{4} = \text{جا} \frac{\theta + 40^\circ}{4}$

٢٤) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ)  $\text{جا } 10^\circ$

ب)  $\text{قتا } 30^\circ$

ج)  $\text{ظتا } 225^\circ$

د)  $\text{ظا } 78^\circ$

هـ)  $\text{جتا} \frac{\pi - 7}{4}$

و)  $\text{ظا} \frac{\pi - 7}{3}$

ز)  $\text{جا} \frac{\pi - 7}{4}$

ح)  $\text{جتا} \frac{\pi - 7}{4}$

٢٥) إذا كان الضلع النهائي لزاوية قياسها  $\theta$  والمرسومة في الوضع القياسي وضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة

في النقطة ب  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  فأوجد:

أ)  $\text{جا}(\theta + 180^\circ)$

ب)  $\text{جتا}(\theta - \frac{\pi}{4})$

ج)  $\text{ظا}(\theta - 360^\circ)$

د)  $\text{قتا}(\theta - \frac{\pi}{4})$

٢٦) **اكتشف الخطأ:** جميع الإجابات التالية صحيحة ما عدا إجابة واحدة فقط خطأ، فما هي:

١-  $\text{جتا } \theta$  تساوي

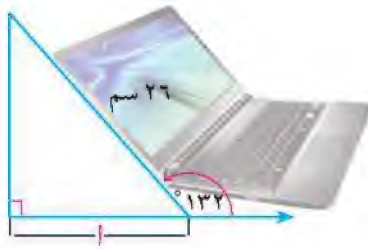
أ)  $\text{جا}(\theta - 270^\circ)$  ب)  $\text{جا}(\theta - 270^\circ)$  ج)  $\text{جتا}(\theta - 360^\circ)$  د)  $\text{جتا}(\theta + 360^\circ)$

٢-  $\text{جا } \theta$  تساوي

أ)  $\text{جتا}(\theta - \frac{\pi}{4})$  ب)  $\text{جا}(\theta - \pi)$  ج)  $\text{جتا}(\theta + \frac{\pi}{4})$  د)  $\text{جا}(\theta + \frac{\pi}{4})$

٣-  $\text{ظا } \theta$  تساوي

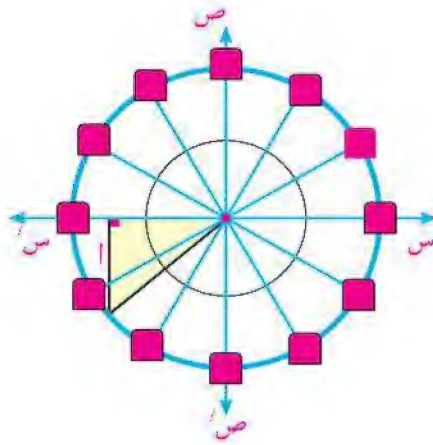
أ)  $\text{ظتا}(\theta - 90^\circ)$  ب)  $\text{ظتا}(\theta - 270^\circ)$  ج)  $\text{ظا}(\theta - 270^\circ)$  د)  $\text{ظا}(\theta + 180^\circ)$



٢٧ **الربط بالتكنولوجيا:** عند استخدام كريم حاسوبه المحمول كانت زاوية ميله مع الأفقى ١٣٢° كما هو موضح بالشكل المقابل.

أ ارسم الشكل السابق فى المستوى الإحداثى، بحيث تكون الزاوية ١٣٢° فى الوضع القياسى ثم أوجد زاويتها المنتسبة.

ب اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيم  $\alpha$ ، ثم أوجد قيمة  $\alpha$  لأقرب سنتيمتر.



**ألعاب:** تنتشر لعبة العجلة الدوارة فى مدينة الملاهى، وهى عبارة عن عدد من الصناديق تدور فى قوس دائرى يبلغ نصف قطره ١٢ متراً، فإذا كان قياس الزاوية المشتركة مع الضلع النهائى فى الوضع القياسى  $\frac{\pi}{4}$ .

أ ارسم الزاوية التى قياسها  $\frac{\pi}{4}$  فى الوضع القياسى.

ب اكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها فى إيجاد قيمة  $\alpha$  ثم أوجد قيمة  $\alpha$  بالمتراً لأقرب رقمين عشريين.

٢٨ **تفكير ناقد:**

أ إذا كان  $\theta$  قياس زاوية مرسومة فى الوضع القياسى، حيث  $\theta = -1$ ، قتنا  $\theta = \sqrt{3}$ . فهل يمكن أن يكون  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ؟ فسر إجابتك؟

ب إذا كان جتا  $\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ، جا  $\theta = \frac{1}{4}$  فأوجد أصغر قياس موجب للزاوية  $\theta$ .

## سوف نتعلم

- سوف نتعلم :
  - رسم دالة الجيب واستنتاج خواصها.
  - رسم دالة جيب التمام واستنتاج خواصها.



تعتمد الموجات فوق الصوتية على ترددات عالية تختلف في طول الموجة. كما تستخدم في التصوير الطبي، وتستخدمها الغواصات كجهاز رادار يعمل في أعماق المحيطات. وعند تمثيل هذه الموجات بمخططات بيانية لتعرف خواص دالة الجيب وجيب التمام قم أنت وزملاؤك بالأعمال التعاونية التالية:



## المصطلحات الأساسية

- Sine Function دالة الجيب
- Cosine Function دالة جيب التمام
- Maximum Value قيمة عظمى
- Minimum Value قيمة صغرى

## Represent sine function graphically

## التمثيل البياني لدالة الجيب



١ أكمل الجدول التالي بالاشتراك مع زملائك:

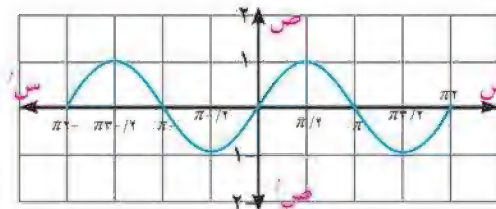
$\theta$	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
جا $\theta$	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	٠	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-١

٢ ارسـم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولاً آخر مستخدماً قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة فى الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



٦ هل لاحظت وجود قيم عظمى أو قيم صغرى لهذا المنحنى. فسّر إجابتك؟

## الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة رسومية
- حاسـب آلى
- برامج رسومية



## Properties of the sine function

## خواص دالة الجيب

في الدالة  $y = \sin(\theta)$  حيث  $\theta$  فإن:

- ★ مجال دالة الجيب هو  $[-\infty, \infty]$  ، ومداها  $[-1, 1]$
- ★ دالة الجيب دالة دورية ذات دورة  $2\pi$  أى أنه يمكن إزاحة المنحنى في الفترة  $[0, 2\pi]$  إلى اليمين أو اليسار  $2\pi$  وحدة،  $4\pi$  وحدة،  $6\pi$  وحدة، ... وهكذا.
- ★ القيمة العظمى لدالة الجيب تساوى ١ وتحدث عند النقاط  $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$   $n \in \mathbb{Z}$
- ★ القيمة الصغرى لدالة الجيب تساوى -١ وتحدث عند النقاط  $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$   $n \in \mathbb{Z}$

## Represent cosine function graphically

## التمثيل البياني لدالة جيب التمام



١ أكمل الجدول التالي بالاشتراك مع زملائك:

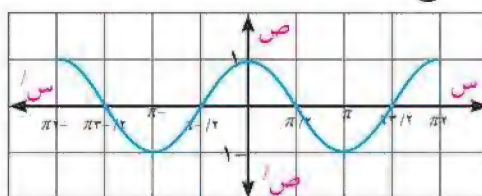
$\theta$	٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
جتا $\theta$	١	٠,٨														

٢ ارسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.

٣ أنشئ جدولاً آخر مستخدماً قيم المعكوس الجمعى للقيم الموجودة في الجدول السابق.

٤ عين جميع النقاط التى حصلت عليها على شبكة الإحداثيات.

٥ أكمل رسم المنحنى بتوصيل جميع نقاطه.



## Properties of cosine function

## خواص دالة جيب التمام

في الدالة  $y = \cos(\theta)$  حيث  $\theta$  فإن:

- ★ مجال دالة جيب التمام هو  $[-\infty, \infty]$  ، ومداها  $[-1, 1]$
- ★ دالة جيب التمام دورية ذات دورة  $2\pi$ ، أى أنه يمكن إزاحة المنحنى في الفترة  $[0, 2\pi]$  إلى اليمين أو اليسار  $2\pi$  وحدة،  $4\pi$  وحدة،  $6\pi$  وحدة، ... وهكذا.

- ★ القيمة العظمى لدالة جيب التمام تساوي ١ وتحدث عند النقاط  $\theta = \pm 2\pi$   $\Rightarrow \sin \theta = 1$
- ★ القيمة الصغرى لدالة جيب التمام تساوي -١ وتحدث عند النقاط  $\theta = \pm \pi$   $\Rightarrow \sin \theta = -1$

### مثال

١ **الربط بالفيزياء:** يمكن لإحدى السفن الدخول إلى الميناء إذا كان مستوى المياه مرتفعاً نتيجة حركة المد والجزر، بحيث لا يقل عمق المياه عن ١٠ أمتار، وكانت حركة المد والجزر في ذلك اليوم تخضع للعلاقة  $f = 6 \sin(15^\circ \theta) + 10$  حيث  $\theta$  هو الزمن الذي ينقضي بعد منتصف الليل بالساعات تبعاً لنظام حساب الوقت بـ ٢٤ ساعة. أوجد عدد المرات التي يبلغ فيها عمق المياه في الميناء ١٠ أمتار تمامًا. ارسم مخططاً بيانياً يبين كيف يتغير عمق المياه مع تغير حركة المد والجزر أثناء اليوم.

### الحل

العلاقة بين الزمن (ن) بالساعات وعمق المياه (ف) بالأمتار هي

من العلاقة:  $f = 6 \sin(15^\circ \theta) + 10$

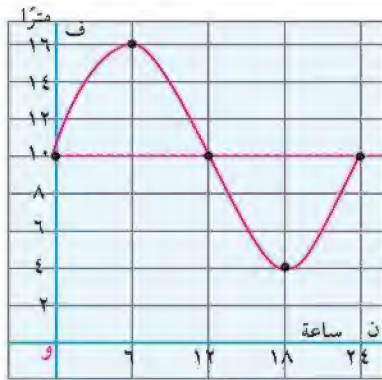
عندما  $\theta = 0$   $f = 6 \sin(0^\circ) + 10 = 10$   $\Rightarrow f = 10$

عندما  $\theta = 6$   $f = 6 \sin(90^\circ) + 10 = 16$   $\Rightarrow f = 16$

عندما  $\theta = 12$   $f = 6 \sin(180^\circ) + 10 = 10$   $\Rightarrow f = 10$

عندما  $\theta = 18$   $f = 6 \sin(270^\circ) + 10 = 4$   $\Rightarrow f = 4$

عندما  $\theta = 24$   $f = 6 \sin(360^\circ) + 10 = 10$   $\Rightarrow f = 10$



ن الساعات	٠	٦	١٢	١٨	٢٤
ف بالأمتار	١٠	١٦	١٠	٤	١٠

من الجدول نجد أن: عمق المياه تبلغ ١٠ أمتار

عندما  $\theta = 0, 12, 24$  ساعة

### حاول أن تحل

١ في المثال السابق أوجد عدد الساعات خلال اليوم التي تستطيع فيها السفينة الدخول إلى الميناء؟

### تحقق من فهمك

حيث  $\theta \in [0, 2\pi]$

حيث  $\theta \in [0, 2\pi]$

١ ارسم منحنى الدالة  $\sin \theta = 3$  جاس

٢ ارسم منحنى الدالة  $\sin \theta = 2$  جتاس



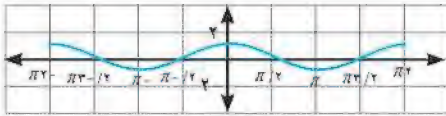
## تمارين ٤ - ٥



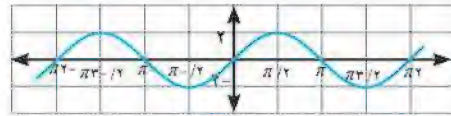
أولاً: أكمل مايتى:

- ١ مدى الدالة د حيث  $d(\theta) = \sin \theta$  هو .....
- ٢ مدى الدالة د حيث  $d(\theta) = \cos \theta$  هو .....
- ٣ القيمة العظمى للدالة ع حيث  $e(\theta) = \sin \theta$  هي .....
- ٤ القيمة الصغرى للدالة هـ حيث  $h(\theta) = \cos \theta$  هي .....

ثانياً: اكتب قاعدة كل دالة مثلثية بجوار الشكل المناظر لها.



شكل (٢) القاعدة هي:



شكل (١) القاعدة هي:

ثالثاً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ٥ أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى، ثم احسب المدى لكل دالة من الدوال الآتية:

أ ص  $\sin \theta$

ب ص  $\cos \theta$

ج ص  $\sin \frac{\pi}{4}$

- ٦ مثل كل من الدوال ص  $\sin \theta$ ، ص  $\cos \theta$  باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية أو بأحد برامج الحاسوب الرسومية ومن الرسم أوجد:

أ مدى الدالة.

ب القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة.



## إيجاد قياس زاوية بمعلومية إحدى نسبها المثلثية

Finding the Measure of an Angle Given the value  
of one of its Trigonometric Ratios

سوف نتعلم

إيجاد قياس زاوية بمعلومية دالة  
مثلثية.



علمت أنه إذا كانت  $\sin \theta = 0.6325$  فإنه يمكن إيجاد قيمة  $\theta$  بمعلومية الزاوية  $\theta$ ،  
وعندما تعطى قيمة  $\sin \theta$  فهل يمكنك إيجاد قيمة  $\theta$ ؟



إذا كانت  $\sin \theta = 0.6325$

فإنه يمكن إيجاد قيم  $\theta$  إذا علمت قيمة  $\sin \theta$ .

مثال

المصطلحات الأساسية

دالة مثلثية.

Trigonometric Function

١ أوجد  $\theta$  حيث  $0^\circ < \theta < 360^\circ$  والتي تحقق كلاً مما يأتي:  
أ)  $\sin \theta = 0.6325$  ب)  $\cos \theta = -0.6325$

الحل

أ) جيب الزاوية  $\sin \theta < 0$

الزاوية تقع في الربع الأول أو الثاني.

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ  $\rightarrow$  SHIFT sin<sup>-1</sup> 0 . 6 3 2 5 = °

الربع الأول:  $\theta = 39.146^\circ$

الربع الثاني:  $\theta = 180^\circ - 39.146^\circ = 140.854^\circ$

ب) ظل تمام الزاوية  $\cos \theta < 0$

الزاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع:

وباستخدام الآلة الحاسبة:

ابدأ  $\rightarrow$  SHIFT tan<sup>-1</sup> 1 . 6 2 0 4 x<sup>-1</sup> = °

الربع الثاني:  $\theta = 180^\circ - 31.40^\circ = 148.60^\circ$

الربع الرابع:  $\theta = 360^\circ - 31.40^\circ = 328.60^\circ$

هل يمكنك التحقق من صحة الحل باستخدام الآلة الحاسبة؟

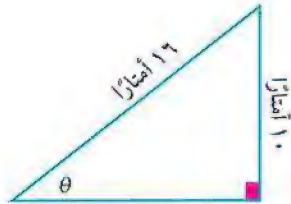
الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية

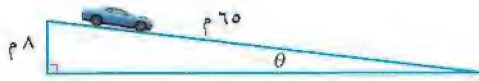
## حاول أن تحل

- ١ أوجد  $\theta$  حيث  $0 < \theta < 360^\circ$  والتي تحقق كلاً مما يأتي:
- أ جتا  $\theta = 0.6205$  ب ظا  $\theta = (-3615, 2)$  ج قتا  $\theta = (-1036, 2)$

## تحقق من فهمك



- ١ **الربط بالألعاب الرياضية:** توجد لعبة التزلج في مدينة الألعاب، فإذا كان ارتفاع إحدى اللعاب ١٠ أمتار وطولها ١٦ متراً كما في الشكل المجاور. فاكتب دالة مثلثية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة الزاوية  $\theta$  ثم أوجد قيمة هذه الزاوية بالدرجات، لأقرب جزء من ألف.



- ٢ **سيارات:** يهبط كريم بسيارته أسفل منحدر طوله ٦٥ متر وارتفاعه ٨ أمتار، فإذا كان المنحدر يصنع مع الأفقى زاوية قياسها  $\theta$ . أوجد  $\theta$  بالتقدير الستيني.



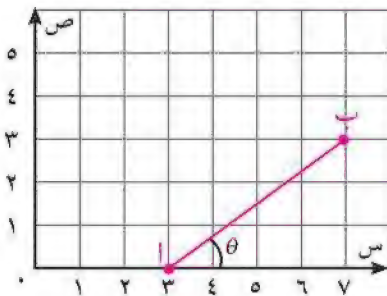
- ٣ **اكتشف الخطأ:** بسبب الرياح انكسرت نخلة طولها ٢٠ متراً، بحيث تأخذ الشكل المجاور، فإذا كان طول الجزء الرأسى منها ٧ أمتار، والجزء المائل ١٣ متراً وكانت  $\theta$  هي الزاوية التي يصنعها الجزء المائل مع الأفقى. فأوجد  $\theta$  بالتقدير الستيني.

إجابة عمر

$$\frac{13}{7} = \theta \text{ قتا } \therefore \theta = 16^\circ 20' 57''$$

إجابة كريم

$$\frac{13}{7} = \theta \text{ قتا } \therefore \theta = 44^\circ 34' 32''$$



- ٤ **التفكير الناقد:** الشكل المجاور يمثل قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين أ(٣، ٠)، ب(٧، ٣) أوجد قياس الزاوية المحصورة بين  $\overline{AB}$  ومحور السينات.



## تمارين ٤ - ٦



أولاً: الاختيار من متعدد:

- ١ إذا كان  $\theta = ٤٣٢٥^\circ$ ، حيث  $\theta$  زاوية حادة موجبة فإن  $\theta \leq$  تساوى
- أ  $٢٥,٦٢٦^\circ$  ب  $٦٤,٣٤٧^\circ$  ج  $٣٢,٣٨٨^\circ$  د  $٤٦,٣١٦^\circ$
- ٢ إذا كان  $\theta = ١,٨$  وكانت  $٩٠^\circ \geq \theta \geq ٣٦٠^\circ$  فإن  $\theta \leq$  تساوى
- أ  $٦٠,٩٤٥^\circ$  ب  $١١٩,٠٥٥^\circ$  ج  $٢٤٠,٩٤٥^\circ$  د  $٢٩٩,٠٥٥^\circ$

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها  $\theta$  فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من جتا  $\theta$ ، جا  $\theta$  فى الحالات الآتية:

أ ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  ج ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  د ب  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

- ٢ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها  $\theta$  فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من قتا  $\theta$ ، قتا  $\theta$  فى الحالات الآتية:

أ ب  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  ج ب  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$  د ب  $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

- ٣ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها  $\theta$  فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب، فأوجد كلاً من ظا  $\theta$ ، ظتا  $\theta$  فى الحالات الآتية:

أ ب  $(\frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}})$  ج ب  $(\frac{3}{4\sqrt{2}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}})$  د ب  $(-\frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{4\sqrt{2}})$

- ٤ إذا قطع الضلع النهائى لزاوية قياسها  $\theta$  فى الوضع القياسى دائرة الوحدة فى النقطة ب فأوجد:  $\theta$  و  $(\theta \leq)$  حيث  $٣٦٠^\circ > \theta > ٠^\circ$  عندما:

أ ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  ج ب  $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  د ب  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$



٥) أوجد بالقياس الستيني أصغر زاوية موجبة تحقق كلاً من:

ج) ظا<sup>-١</sup> ١,٤٥٥٢

ب) جتا<sup>-١</sup> ٠,٤٣٦

أ) جا<sup>-١</sup> ٠,٦

و) قتا<sup>-١</sup> (١,٦٠٠٤-)

هـ) ظنا<sup>-١</sup> ٣,٦٢١٨

د) قا<sup>-١</sup> (٢,٢٣٦٤-)

٦) إذا كانت  $\theta \geq 0^\circ$  و  $\theta \leq 360^\circ$  فأوجد قياس زاوية  $\theta$  لكل مما يأتي:

ج) ظا<sup>-١</sup> (٢,١٤٥٦-)

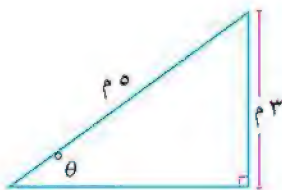
ب) جتا<sup>-١</sup> (٠,٦٤٢-)

أ) جا<sup>-١</sup> (٠,٢٣٥٦)

٧) إذا كان جا  $\theta = \frac{1}{3}$  وكانت  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

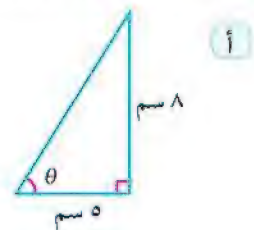
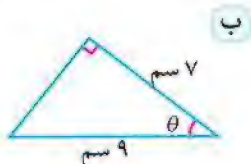
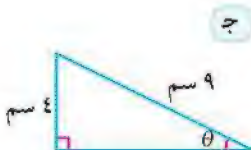
أ) احسب قياس زاوية  $\theta$  لأقرب ثانية

ب) أوجد قيمة كل من: جتا  $\theta$  ، ظا  $\theta$  ، قا  $\theta$ .



٨) **سؤال:** سلم طوله ٥ أمتار يستند على جدار فإذا كان ارتفاع السلم عن سطح الأرض يساوي ٣ أمتار فأوجد بالراديان زاوية ميل السلم على الأفقى.

٩) أوجد قياس زاوية  $\theta$  بالقياس الستيني في كل شكل من الأشكال الآتية:



# ملخص الوحدة

١ الزاوية الموجبة: هي زوج مرتب من شعاعين ( $\vec{OA}$ ،  $\vec{OB}$ ) هما ضلعا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هي رأس الزاوية، ويسمى  $\vec{OA}$  الضلع الابتدائي، و  $\vec{OB}$  الضلع النهائي للزاوية:



٢ الوضع القياسي للزاوية: في نظام إحداثي متعامد تكون رأس الزاوية هي نقطة الأصل، وضلعها الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.

٣ الزوايا المتكافئة: هي الزوايا التي قياساتها على الصورة  $(\theta + n \times 360^\circ)$  حيث  $n \in \mathbb{Z}$  يكون لها نفس الضلع النهائي.

٤ الزاوية النصف قطرية: هي الزاوية المركزية في الدائرة وتقابل قوساً طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة.

٥ العلاقة بين القياس الستيني والدائري: إذا كانت لدينا زاوية قياسها الستيني يساوي  $s^\circ$  وقياسها الدائري يساوي  $\theta^\circ$  فإن:

$$\theta^\circ = s^\circ \times \frac{\pi}{180}, \quad s^\circ = \theta^\circ \times \frac{180}{\pi}$$

٦ طول القوس: إذا كان  $\theta^\circ$  هو قياس الزاوية المركزية لدائرة طول نصف قطرها  $r$  تقابل قوساً من الدائرة طوله  $l$  فإن:  $l = r \times \theta^\circ$

٧ الزاوية الربعية: هي زاوية في الوضع القياسي، بحيث يقع ضلعها النهائي على أحد المحورين  $s$  أو  $v$ .

٨ دائرة الوحدة: هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

٩ النسبة المثلثية: هي نسبة بين طولى ضلعين من أضلاع المثلث القائم الزاوية.

١٠ اشارات الدوال المثلثية:

لاحظ أن:

الربع الأول:	الربع الثاني:	الربع الثالث:	الربع الرابع:
$0^\circ < \theta < 90^\circ$	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	$180^\circ < \theta < 270^\circ$	$270^\circ < \theta < 360^\circ$
كل الدوال المثلثية موجبة	جا $\theta$ ، قتا $\theta$ موجبتان وباقي الدوال سالبة.	ظا $\theta$ ، قتا $\theta$ موجبتان وباقي الدوال سالبة.	جتا $\theta$ ، قتا $\theta$ موجبتان وباقي الدوال سالبة.



١١ الدوال المثلثية للزاويا التي قياساتها:

أولاً:  $(\theta - 180^\circ)$

ثانياً:  $(\theta + 180^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 180^\circ) &= -\text{جا } \theta, \quad \text{جتا } (\theta + 180^\circ) = -\text{جتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 180^\circ) &= \text{ظا } \theta, \quad \text{ظتا } (\theta + 180^\circ) = -\text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 180^\circ) &= -\text{جا } \theta, \quad \text{جتا } (\theta - 180^\circ) = -\text{جتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - 180^\circ) &= \text{ظا } \theta, \quad \text{ظتا } (\theta - 180^\circ) = -\text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

ثالثاً:  $(\theta - 360^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 360^\circ) &= \text{جا } \theta, \quad \text{جتا } (\theta - 360^\circ) = \text{جتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - 360^\circ) &= \text{ظا } \theta, \quad \text{ظتا } (\theta - 360^\circ) = \text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

رابعاً:  $(\theta - 90^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 90^\circ) &= \text{جتا } \theta, \quad \text{جتا } (\theta - 90^\circ) = -\text{جا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - 90^\circ) &= -\text{ظتا } \theta, \quad \text{ظتا } (\theta - 90^\circ) = \text{ظا } \theta \end{aligned}$$

خامساً:  $(\theta + 90^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 90^\circ) &= -\text{جتا } \theta, \quad \text{جتا } (\theta + 90^\circ) = \text{جا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 90^\circ) &= \text{ظتا } \theta, \quad \text{ظتا } (\theta + 90^\circ) = -\text{ظا } \theta \end{aligned}$$

سادساً:  $(\theta - 270^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 270^\circ) &= \text{جتا } \theta, \quad \text{جتا } (\theta - 270^\circ) = -\text{جا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - 270^\circ) &= -\text{ظتا } \theta, \quad \text{ظتا } (\theta - 270^\circ) = \text{ظا } \theta \end{aligned}$$

سابعاً:  $(\theta + 270^\circ)$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 270^\circ) &= -\text{جتا } \theta, \quad \text{جتا } (\theta + 270^\circ) = \text{جا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 270^\circ) &= \text{ظتا } \theta, \quad \text{ظتا } (\theta + 270^\circ) = -\text{ظا } \theta \end{aligned}$$

١٢ خواص كل من دالتى الجيب وجيب التمام

الخاصية	دالة الجيب د(θ) = جتا θ	دالة جيب التمام د(θ) = جتا θ
المجال والمدى	المجال هو $[-\infty, \infty]$ ، المدى هو $[-1, 1]$	المجال هو $[-\infty, \infty]$ ، المدى هو $[-1, 1]$
القيمة العظمى	تساوى ١ عند $\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ، $n \in \mathbb{Z}$	تساوى ١ عند $\theta = 2\pi n$ ، $n \in \mathbb{Z}$
القيمة الصغرى	تساوى -١ عند $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ ، $n \in \mathbb{Z}$	تساوى -١ عند $\theta = \pi + 2\pi n$ ، $n \in \mathbb{Z}$

١٣ إذا قطع الضلع النهائى للزاوية  $\theta$  المرسومة في الوضع القياسى دائرة الوحدة في النقطة ب(س، ص) فإن  $\text{س} = \text{جتا } \theta$  ،  $\text{ص} = \text{جا } \theta$  وتعرف بالدوال الدائرية.

معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:





## اختبارات عامة

### (الجبر وحساب المثلثات)

### الاختبار الأول

السؤال الأول : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) إذا كان ل، م جذري المعادلة  $x^2 - 7x + 3 = 0$  فإن  $L^2 + M^2 =$    
 أ) ٧ ب) ٣ ج) ٥٨ د) ٧٩

- ٢) إذا كانت  $\theta = 1$ ،  $\theta = 0$  فإن  $\theta$  تساوي   
 أ)  $\frac{\pi}{2}$  ب)  $\pi$  ج)  $\frac{\pi}{4}$  د)  $\pi^2$

- ٣) المعادلة التربيعية التي جذراها ٢-، ٣+ ت هي   
 أ)  $x^2 + 4x + 13 = 0$  ب)  $x^2 - 4x + 13 = 0$  ج)  $x^2 + 4x - 13 = 0$  د)  $x^2 - 4x - 13 = 0$

- ٤) إذا كان أحد جذري المعادلة  $x^2 - (2+m)x + 3 = 0$  معكوسًا جمعيًا للجذر الآخر فإن م تساوي   
 أ) ٣ ب) ٢ ج) -٢ د) -٣

### السؤال الثاني: أكمل

- أ) الدالة د: حيث  $D = (س) - (س - ١) (س + ٢)$  موجبة في الفترة   
 ب) الزاوية التي قياسها ٩٣٠ تقع في الربع   
 ج) إذا كان  $\theta = \frac{1}{4}$ ،  $\theta = \frac{3}{4}$  فإن  $\theta$  تساوي   
 د) المعادلة التربيعية التي جذراها ضعف جذري المعادلة  $x^2 - 8x + 5 = 0$  هي

### السؤال الثالث:

- أ) ضع العدد  $\frac{3-2}{2+3}$  في صورة عدد مركب. حيث  $t = 2 - 1$ .   
 ب) إذا كان  $4$  جا  $-3 = 0$  أوجد  $\theta$  (  $1 \leq \theta$  ) حيث  $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

### السؤال الرابع:

- أ) إذا كانت د: ح  $\leftarrow$  ح حيث  $D = (س) - (س + ٨) - ١٥$    
 أولاً: ارسم منحنى الدالة في الفترة  $[1, 7]$    
 ثانياً: عين من الرسم إشارة هذه الدالة.

- ب) إذا كان  $س = 3 + 2t$ ،  $ص = \frac{2-4}{2-1}$  فأوجد  $س + ص$  في صورة عدد مركب.

### السؤال الخامس:

- أ) أوجد مجموعة حل المتباينة  $س^2 + ٣س - ٤ \geq 0$ .   
 ب) إذا كان  $\theta = \frac{3}{4}$  حيث  $180^\circ > \theta > 270^\circ$  فأوجد قيمة: جتا  $(360^\circ - \theta)$  - جتا  $(90^\circ - \theta)$  (ب)

## اختيارات عامة

## الاختبار الثاني

(الجبر وحساب المثلثات)

**السؤال الأول: أكمل ما يأتي**

- ١ أبسط صورة للعدد التخيلي  $٤٣ =$  .....
- ٢ إذا كان جذرا المعادلة  $س٢ - ٦س + ل = ٠$  حقيقيان ومتساويان فإن  $ل =$  .....
- ٣ إذا كان  $٠ < \theta < ٩٠^\circ$  وكان  $\text{جا } \theta = \theta٢$  جتا  $\theta = \theta٣$  فإن  $\theta$  (  $\leq$  )  $\theta$  .....
- ٤ مدى الدالة  $د$  حيث  $د(\theta) = \frac{٣}{٢} \text{ جا } \theta$  هو .....

السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١) المعادلة:  $s^2(s-1)(s+1) = 0$  من الدرجة:   
 أ) الأولى      ب) الثانية      ج) الثالثة      د) الرابعة
- ٢) إذا كان جذرا المعادلة  $s^2 + 3s - 4 = 0$  حقيقيان ومختلفان فإن  $m$  تساوي:   
 أ) ١      ب) ٢      ج) ٣      د) ٤
- ٣) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوي  $180^\circ (n-2)$  حيث  $n$  عدد الأضلاع فإن قياس زاوية المثلث المنتظم بالقياس الدائري تساوي:

- ۴) إذا كان  $\theta = \sqrt{3}$  ،  $\theta > \pi > \theta$  فإن ق ( $\theta \searrow$ ) يساوي

### السؤال الثالث :

- أوجد قيمة  $k$  التي تجعل أحد جذري المعادلة:  $kx^2 + 7x + 4 = 0$  هو المعكوس الضربي للجذر الآخر.
- ب إذا كان  $\theta = 750^\circ$  حتا  $300^\circ +$  جا ( $-60^\circ$ ) ظلتا  $120^\circ$  حث  $0^\circ < \theta < 360^\circ$  فأوجد  $\sin(\theta)$ .

### السؤال الرابع:

- أ** أولا: أوجد قيمتي  $\alpha$ ،  $\beta$  اللتين تحققان المعادلة:  $12 + 3\alpha = 4 - 2\beta$  ثانيا: أوجد في ح مجموعة حل المتباينة:  $s(1 + s) \geq 0$ .
- ب** زاوية مركزية قياسها  $\theta$  مرسومة في دائرة طول نصف قطرها ١٨ سم وتحصر قوسا طوله ٢٦ سم. أوجد  $\theta$  بالقياس الستيني.

### السؤال الخامس:

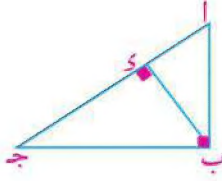
- أ إذا كان مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية  $(1 + 2 + 3 + \dots + n)$  يعطى بالعلاقة  $\frac{n(n+1)}{2} =$  فكم عددا صحيحا متتاليا بدءا من العدد ١ يكون مجموعها مساويا ٢١٠
- ب إذا كان جاس  $\frac{E}{S} = 90^\circ$  حيث  $90^\circ < S < 180^\circ$  فأوجد جاس  $(180^\circ - S)$  + ظل  $(360^\circ - S)$  + ج  $(270^\circ - S)$ .

# اختبارات عامة

## (الهندسة)

## الاختبار الثالث

### السؤال الأول: أكمل ما يأتي



١ المثلثان المشابهان لثالث يكونان .....

٢ في الشكل المقابل :

أولاً: (أب) =  $2 \times$  ..... ، (ج ب) =  $2 \times$  ج د .....  
ثانياً: د  $\times$  ج = .....  
ثالثاً: أ ب  $\times$  ج = .....  
.....  
.....

### السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ مستطيلان متشابهان الأول طوله ٥ سم والثاني طوله ١٠ سم ، فإن النسبة بين محيط الأول إلى محيط الثاني يساوي:

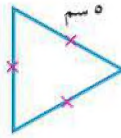
أ ١ : ٥

ب ١ : ٢

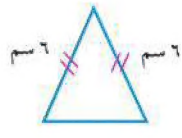
ج ١ : ٣

د ١ : ٤

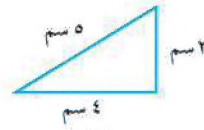
٢ أي من المثلثين الآتيين متشابهين؟



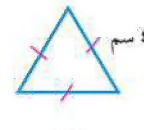
(١)



(٢)



(٣)



(٤)

أ (١) ، (٢)

ب (١) ، (٣)

ج (٢) ، (٤)

د (٣) ، (٤)

٣ إذا كانت النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين ٤ : ١ فإن النسبة بين مساحتي سطحيهما تساوي

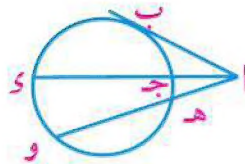
أ ١ : ٢

ب ١ : ٤

ج ١ : ٨

د ١ : ١٦

٤ في الشكل المقابل: كل التعبيرات الرياضية التالية صحيحة ما عدا العبارة :



أ (أب) =  $2 \times$  ج د .....  
ب (أب) =  $2 \times$  أ ه .....  
ج أ ج  $\times$  أ ه = أ ه  $\times$  ج د .....  
د أ ج  $\times$  ج د = أ ه  $\times$  ج د .....  
.....  
.....

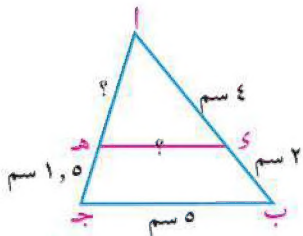
.....  
.....

### السؤال الثالث :

أ في الشكل المقابل:  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  ، أثبت أن:  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

وإذا كان: أ د = ٤ سم ، د ب = ٢ سم ، ه ج = ١ سم ، ب ج = ٥ سم.

أوجد طول كل من أ ه ، و ه



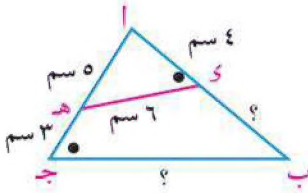
ب أ ب ج مثلث، و  $\exists \overline{BC}$  بحيث ب د = ٥ سم ، د ج = ٣ سم ، ه ج بحيث أ ه = ٢ سم ، ج ه = ٤ سم.

أثبت أن  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  ، ثم أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما



## اختبارات عامة

### السؤال الرابع :



أ في الشكل المقابل:  $\angle ADE = \angle ACB$  و  $\angle AED = \angle ABC$

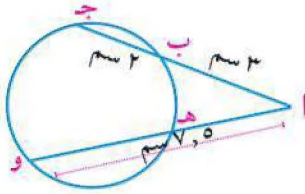
أي = ٤ سم ، أ ه = ٥ سم ، ه د = ٦ سم ، ه ج = ٣ سم

أوجد طول كل من :  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  ،  $\overline{AC}$

ب  $\overline{DE} \cap \overline{BC} = \{I\}$  و ه = ٥ سم

أ ب = ٣ سم ، ب ج = ٢ سم ، أ و = ٧,٥ سم

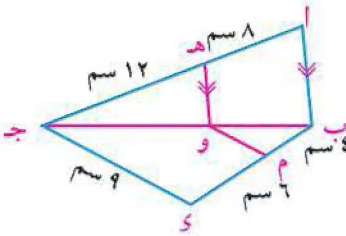
أوجد طول ه و



### السؤال الخامس :

أ أ و متوسط في المثلث أ ب ج ، نصفت  $\angle A$  ب منتصف قطع  $\overline{AB}$  في ه ، نصفت  $\angle A$  ج ب منتصف

قطع  $\overline{AC}$  في و ، رسم ه و ، أثبت أن  $\overline{HO} \parallel \overline{BC}$



ب في الشكل المقابل:

$\overline{AB} \parallel \overline{HO}$  ، أ ه = ٨ سم ، ج ه = ١٢ سم ، ج و = ٩ سم ،

ب م = ٤ سم ، م و = ٦ سم

أولاً: أوجد طول  $\overline{BO}$

ثانياً: أثبت أن:  $\overline{OM} \parallel \overline{JO}$

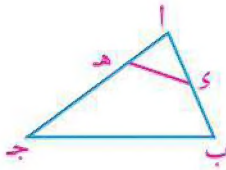
## (الهندسة)

## الاختبار الرابع

### السؤال الأول : أكمل ما يأتي

١ أي مضلعين منتظمين لهما نفس عدد الأضلاع يكونان .....

٢ في الشكل المقابل:

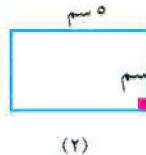
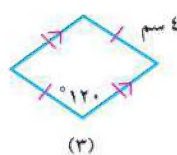
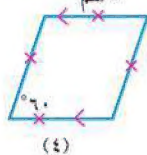
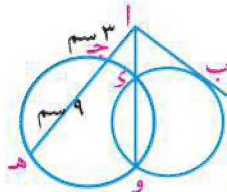


إذا كان المثلث  $\triangle ADE \sim \triangle ACB$  أ ج ب

فإن  $\angle ADE = \angle ACB$  و  $\angle AED = \angle ABC$

٣ إذا تقاطع المستقيمان الحاويزان للوترين  $\overline{OH}$  ،  $\overline{OS}$  في نقطة ه فإن:  $\angle H = \angle S = \dots$

٤ في الشكل المقابل: إذا كان أ ج = ٣ سم ، ج ه = ٩ سم فإن أ ب = .....



### السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:

١ أي من المضلعين الآتيين متشابهين؟

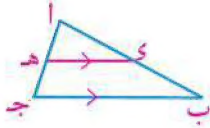
## اختبارات عامة

١ المضلعان (١)، (٢) ب المضلعان (١)، (٣) ج المضلعان (٣)، (٤) د المضلعان (٢)، (٤)

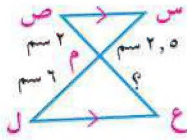
٢ إذا كانت النسبة بين مساحتي مضعين متشابهين ٢٥ : ١٦ فإن النسبة بين طولي ضلعين متناظرين

فيهما تساوى: أ ٥ : ٢ ب ٥ : ٤ ج ٢٥ : ١٦ د ٤١ : ١٦

٣ في الشكل المقابل: جميع التعبيرات الرياضية التالية صحيحة ماعدا التعبير:

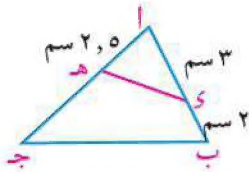


أ  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$  ب  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{AB}$  ج  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AB}$  د  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{BC}$



٤ في الشكل المقابل: طول  $\overline{ME}$  تساوى:

أ ٣,٦ سم ب ٤ سم ج ٤,٢ سم د ٤,٨ سم



السؤال الثالث:

أ في الشكل المقابل:  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$

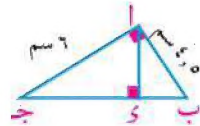
أثبت أن الشكل B ج د رباعى دائرى وإذا كان  $AD = 3$  سم،

B  $DE = 2$  سم،  $AD = 5$  سم. أوجد طول هـ جـ.

ب أ ب ج د شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ. رسم هـ و // ج ب ويقطع آ ب فى و

رسم هـ م // ج د ويقطع آ و فى م. أثبت أن م و // ب د .

السؤال الرابع:



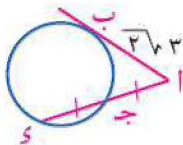
أ في الشكل المقابل:  $\angle A = 90^\circ$ ،  $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ ،  $AB = 5$ ،  $AC = 4$  سم،

أ ج = ٦ سم. أوجد طول كل من ب د، د ج، آ و

ب أ ب ج د شكل رباعى فيه ب ج = ٢٧ سم، أ ب = ١٢ سم، آ د = ٨ سم، د ج = ١٢ سم،

أ ج = ١٨ سم، أثبت أن  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  ج د وأوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما .

السؤال الخامس:



أ في الشكل المقابل:  $\overline{AB}$  مماس للدائرة، ج منتصف آ و

أ ب = ٣٦٣ أوجد طول آ جـ

ب أ ب ج مثلث فيه أ ب = ٨ سم، أ ج = ١٢ سم، ب ج = ١٥ سم، آ و ينصف  $\angle A$  ويقطع

ب ج فى د، ثم رسم د هـ // ب أ ويقطع آ جـ فى هـ، أوجد طول كل من ب د، ج هـ

## المواصفات الفنية:

رقم الكتاب:	٢١٢/١٠/٣/١١/١/٢١
مقاس الكتاب:	$\frac{1}{8}$ (٨٢ × ٥٧) سم
طبع المتن:	٤ ألوان
طبع الغلاف:	٤ ألوان
ورق المتن:	٧٠ جم أبيض
ورق الغلاف:	١٨٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف:	١٧٢ صفحة

<http://elearning.moe.gov.eg>

الأشراف برنتنج هاوس